# 固定资产加速折旧系统的数学模型[①]

高 鸿 桢

## 一、通用折旧公式的建立

设一固定资产的有效使用期为 $n$ 年，原值为 $y_0$，第 $t$ 年年末的净值为 $y_t$，第 $t$ 年的折旧额为 $D_t(t=1,2,\cdots,n)$，则有

$$y_{t+1}=y_t-D_{t+1} \qquad (t=0,1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

用差分符号可表为

$$\Delta y_t=-D_{t+1} \qquad (t=0,1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

其中，$\Delta y_t=y_{t+1}-y_t$

若不计固定资产报废时的清理费用，则第 $n$ 年末的净值 $y_n$ 就等于固定资产的残值 $s$，公式（1）可看作折旧系统的定义式，不论怎样的折旧系统都应满足此式，公式（2）是公式（1）的差分形式，利用该式对折旧额序列 $\{D_t\}$ 或净值序列 $\{y_t\}$ 提出不同的要求，解差分方程，就可得到不同的折旧系统。

1. 要求各年的折旧额都相等。即

$$D_1=D_2=\cdots=D_n=D^*$$

则由差分方程 $\Delta y_t=-D^*$ 和边界条件 $y_n=s$ 可解得

$$D^*=(y_0-s)/n$$

$$y_t=y_0-tD^*$$

这就是“平均年限法”折旧系统。

2. 要得到加速折旧系统，就是要求折旧额单调递减，即

$$D_1>D_2>\cdots>D_t>D_{t+1}>\cdots>D_n \tag{3}$$

对这样的系统最自然的要求是：从 $D_1$ 到 $D_n$ 按 $n,n-1,\cdots,1$ 这样的比例递减，由此可得

$$D_t=(n-t+1)D_n=2(n-t+1)(y_0-s)/[n(n+1)] \tag{4}$$

这就是“年数总和法”折旧公式。解差分方程得

$$\begin{aligned} y_t&=y_0+D_n[2n+1)t-t^2]/2 \\ &=y_0+(y_0-y_n)t(2n+1-t)/[n(n+1)] \end{aligned} \tag{5}$$

3. 在加速折旧系统中，若要求净值序列成递减等比数列，即

$$y_{t+1}=\alpha\cdot y_t \qquad (0<\alpha<1) \qquad (t=0,1,2,\cdots,n-1) \tag{6}$$

---

①本研究受国家自然科学基金资助（批准号：79870040）。

则各年的净值　　　$y_t = \alpha^t y_0$

各年的折旧额　　　$D_t = y_{t-1} - y_t = \alpha^{t-1}(1-\alpha)y_0$　　　(7)

因此　　　$D_{t+1} / D_t = \alpha < 1$

可知 $D_t$ 序列也是递减的等比数列。当残值 $y_n = s$ 已固定，则有 $\alpha = \sqrt[n]{s / y_0}$

若令 $\beta = 1 - \alpha$，则 $0 < \beta < 1$，（6）式成为

$$y_{t+1} = y_t - \beta \cdot y_t$$

$$D_t = (1-\beta)^{t-1} \beta \cdot y_0 \tag{8}$$

这就是西方会计学中的“递减余额法”折旧公式。

若在（6）式中令 $\alpha = 1 - 2/n$，则

$$D_{t+1} = (2/n) y_t$$

这就是“双倍递减余额法”折旧公式。此时可得

$$D_t = (1 - 2/n)^{t-1}(2/n) y_0 \qquad (t = 1,2,\cdots,n) \tag{9}$$

$$y_t = (1 - 2/n)^t y_0 \tag{10}$$

## 二、加速折旧系统的若干性质

由（2）式，因 $D_t > 0$，故 $\Delta y_t < 0$ $(t = 0,1,2,\cdots,n-1)$，所以净值序列 $\{y_t\}$ 是严格递减序列。

对（2）式两边差分可得

$$\Delta(\Delta y_t) = \Delta(-D_{t+1})$$

由（3）式可知　　　$\Delta D_{t+1} < 0 \qquad (t = 0,1,2,\cdots,n-1)$

即　　　$\Delta^2 y_t > 0$

因此　　　$y_{t+1} < (y_{t+2} + y_t)/2 \qquad (t = 0,1,2,\cdots,n-2)$

这表明如以 $t$ 轴为横轴以 $y_t$ 为纵轴建立平面直角坐标系，将 $y_t$ 的变化在图中标出。那么，连结 $(t, y_t)$ 和 $(t+2, y_{t+2})$ 两点的线必定在点 $(t+1, y_{t+2})$ 的上方。

**性质 1**　在加速折旧系统下，净值序列所形成的图象（即连结 $(t, y_t)$ $(t = 0,1,2,\cdots,n)$ 的线段所形成的折线）是凸向原点的折线。

**性质 2**　若将各年折旧费折算为现值，则用加速折旧系统的总现值大于用平均年限法的总现值。

**性质 3**　设年利率为 $i$，则应用总和法折旧额的总现值与平均年限法之差 $Q(i,n)$ 可由下式给出

$$Q(i,n) = (P/A, i, n) \cdot k(i,n) \cdot D^* \tag{11}$$

其中，$(P/A, i, n) = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$ 是年金现值系数；$D^* = (y_0 - s)/n$ 是平均年限法的年折旧额；$k(i,n) = 1 - \dfrac{2}{n+1} \cdot \dfrac{1+i}{i} + \dfrac{2n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{(1+i)^n - 1}$ 是与 $i,n$ 有关的系数。

## 三、若干理论问题的探讨

1. 折旧系统加速程度的调节

只要满足（3）式的折旧系统就是加速折旧系统，但不同的系统“加速”的程度不同，年数总和折旧系统是一种很自然想到的系统，但我们可以改变形式，以期得到不同的加速程度。例如，我们可以令

$$D_1/n^2=D_2/(n-1)^2=\cdots=D_t/(n+1-t)^2=\cdots=D_n/1^2$$

则可得到加速程度更高的折旧系统。此时

$$D_t=(n+1-t)^2D_n=6\cdot(n+1-t)^2(y_0-s)/[n(n+1)(2n+1)]$$

更进一步，我们可以取一组数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，使得 $p_1>p_2>\cdots>p_n$，且

$$D_1/p_1=D_2/p_2=\cdots=D_t/p_t=\cdots=D_n/p_n=c \tag{12}$$

其中，$c$ 可由 $\sum_{t=1}^{n}D_t=y_0-s$ 定出，即 $c=(y_0-s)/\sum_{t=1}^{n}p_t$。

2. 双倍递减余额法的改进

按双倍递减余额法（以下简称“双倍法”）折旧，由（10）式会自动产生一个残值

$$s=y_n=(1-2/n)^n y_0$$

由此可得到仅与$n$有关的残值率

$$\delta(n)=s/y_0=(1-2/n)^n$$

当$n>3$时，这个残值率是比较大的。事实上，我们可以证明：

**命题**　当固定资产的有效使用年限 $n>3$ 时，按双倍法折旧所产生的残值率 $\delta(n)>5\%$。

由此命题可知当 $n>3$ 时，$S>5\%\cdot y_0$，我国一般可取残值为原值的3～5%，可见如用该法折旧则会产生残值过大的问题，为克服这个缺点，一些文献提出使用中途改变折旧额的方法。即在前若干年用双倍法，余下各年用平均年限法。但是这样做又产生新的问题。其一是：究竟应前多少年用“双倍法”，并无统一标准，有的文献认为应在最后两年用“平均法”，前面用“双倍法”，也有的人认为应在后 $(n+3)/2$ 或 $(n+2)/2$ 年用“平均法”；其二是这样做的结果可能与“加速折旧”的初衷相背，因为折旧额序列已不能满足（3）式。这里我们将提出一个新的方法，这个方法的思路是在原“双倍法”的基础上添加一个“修正系数”$\xi$，可称为“修正双倍余额递减法”。具体方法如下：

设残值率 $\delta$ 已给定，$S=\delta y_0$，用“双倍法”得到的折旧第 $t$ 年折旧额为 $D_t$，净值为 $y_t$，则新方法的第 $t$ 年折旧额为 $D_t'$，净值为 $y_t'$，则

$$D_t'=\xi D_t=\xi\cdot 2/n\cdot y_{t-1}$$

$$y_t'=\xi y_t+(1-\xi)y_0 \qquad (t=1,2,3,\cdots,n)$$

其中，

$$\xi=(1-\delta)/[1-(1-2/n)^n] \tag{13}$$

在这样的系统下，由$D_t$和$y_t$的公式（9）、（10）可知

$$D_1'>D_2'\geqslant\cdots>D_t'>D_{t+1}'>\ \cdot D_n'$$

$$
\begin{aligned}
y_n' &= \xi y_n + (1-\xi) y_0 \\
&= \frac{(1-\delta)(1-2/n)^n y_0}{1-(1-2/n)^n} + y_0 - \frac{(1-\delta) y_0}{1-(1-2/n)^n} \\
&= -(1-\delta) y_0 + y_0 = \delta y_0
\end{aligned}
$$

即经修正后的折旧额序列保持递减的性质，而所产生的残值恰好等于预先设定的残值。给定残值率 $\delta$ 和年限 $n$，修正系数可由（13）式求出。当残值率 $\delta = 5\%$ 时，对于不同的 $n$，修正系数如表 1 所示。

**表 1**

| $n$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\delta(n)$ | 0.0370 | 0.0625 | 0.0778 | 0.0878 | 0.0949 | 0.1001 | 0.1042 | 0.1074 | 0.1216 | 0.1262 |
| $\xi$ | 0.9865 | 1.0133 | 1.0301 | 1.0414 | 1.0496 | 1.0557 | 1.0605 | 1.0643 | 1.0815 | 1.0872 |

为便于比较，我们把上例中按不同折旧系统折旧所得的各年净值序列列在表 2，从表中可以看出“双倍法”和“修正双倍法”的差别。

**表 2**

| 年($t$) | 平均年限法 $Y_t$ | 总和法 $Y_t$ | 双倍法 $Y_t$ | 修正双倍法 $Y_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 105 | 105.00 | 105.00 | 105.00 |
| 1 | 95 | 86.82 | 84.00 | 82.60 |
| 2 | 85 | 70.45 | 67.20 | 64.67 |
| 3 | 75 | 55.91 | 53.76 | 50.33 |
| 4 | 65 | 43.18 | 43.01 | 38.86 |
| 5 | 55 | 32.27 | 34.41 | 29.68 |
| 6 | 45 | 23.18 | 27.53 | 22.34 |
| 7 | 35 | 15.91 | 22.02 | 16.47 |
| 8 | 25 | 10.45 | 17.62 | 11.77 |
| 9 | 15 | 6.82 | 14.09 | 8.01 |
| 10 | 5 | 5.00 | 11.27 | 5.00 |

## 参考文献

冈本哲治著，袁镇岳、高鸿桢译:《经济数学》，辽宁人民出版社，1985。

梅强等:《技术经济学》，企业管理出版社，1995。

1998 年 11 月

（作者单位：厦门大学）