

经济学与数学模型 (连载—1)

高鸿桢

编者按：现在经济学时尚数学模型，不论懂与不懂、必要与不必要的，都要添加些数学模型与运算，有为数学而数学的倾向，于是就难免闹些东施效颦般的笑话，漏洞、错误习以为常。为此，本刊请高鸿桢教授有针对性地写点这方面的文章予以连载，希望有助于初学者能正确运用数学模型。

内容提要：本文讨论了在经济学研究中建立数学模型及应用数学工具的问题，分析了经济数学模型分类及其特点。认为在经济学研究中建立数学模型时要从所研究问题为基点选择适当的模型应用恰当的数学工具。

关键词：经济数学模型 模型选择 数学工具

作者：厦门大学经济学院教授、博士生导师。

一、关于建立经济数学模型

在经济学论文中应用数学模型已经不是什么新问题，与几年前相比，我国大陆经济类核心期刊所刊登的使用数学模型的论文已经大大增加，且有继续增加的趋势。用“经济数学模型”为关键词在“百度”或“谷歌”上搜索，结果竟有九千余个网址，可见这已成为“热门词条”了。然而在这繁荣的背后，有些基本问题并未达成共识。例如，2004年孙冶方经济科学奖（这个奖项被誉为中国经济学最高奖）的得奖论文被质疑为“完全不懂得均衡模型的构建，同时又完全脱离实践的”“不能成立的论文”^①，这至少可以说明质疑者和该项奖项评委之间对于模型评价上存在很大的差距。应怎样建立一个较好的经济模型，这是一个可以探讨的问题，笔者想就一些一般性的问题发表自己不成熟的看法。

（一）模型选择。

提起“经济数学模型”，首先要问的是建立怎样的模型？所谓“模型”是现实对象的某种抽象，模型是由原型舍弃去某些“不重要”属性而得到的。这里什么是“重要”属性，什么是“不重要”属性是按建模者的需要来取舍的。因此一个原型可以有多种不同的模型。比如，原型是一架飞机，小朋友可以用火柴盒粘贴成一个飞机的模型，也可以将竹蜻蜓当作飞机模型，前者认为飞机重要的属性是外形，而后者则认为重要的属性是“会飞”：航空公司办公桌上的飞机模型在外形上和原飞机非常相似，但航空模型竞赛者选手注意的却是他的模型飞机

^① 见参考文献1。

的飞行性能。经济数学模型用数学方法对经济现象进行描述，对同一经济现象也可以用不同的模型加以描述，选取怎样的模型很大程度上取决于建模者对经济现象的认识。因此在建模前对经济现象的基本认识是很重要的。例如，你想建立一个预测股票价格走势的模型，你可以采用金融技术分析模型，也可以采用经济计量时间序列模型，还可以采用非线性分析的混沌模型。无论采用什么样的模型，都意味着你已以为该模型适合于你所研究的经济现象。研究经济问题不是从定义出发，也不是从假定出发，而是从经济现象出发。然而如果你想采用经济数学模型研究经济现象，那么你必须了解相关模型的基本假定，因为你采用某种模型就意味着你默认了该基本假定。假如你采用金融技术模型预测股市，你就默认了“全信息假定”，即股票价格和交易量信息反映了全部的股票信息。在这样的模型中，你就不应该将上市公司的“每股净资产”、“年盈利额”之类的指标纳入模型；如果你采用时间序列模型你就默认了计量经济学的相关假定；如果你采用混沌模型，你就默认了股价的变动服从非线性规律，它具有内生的随机性。最终采用哪一种模型取决于你对经济现象的认识、研究的目标以及你所掌握的数据资料。

一般地，我们把在经济学研究中所应用的数学模型称为经济数学模型。经济数学模型大体上可分为机制分析模型、数据分析模型和实验仿真模型三大类，它们都是为研究特定的经济现象而建立的数学结构。机制分析模型是对经济现象进行简化、抽象，从某些假定出发，通过严格的逻辑推理，揭示经济现象的规律。这一类模型并不直接处理实际的经济数据，着重点在于逻辑推导过程的严密性，如果推导没有错误，只要假设是正确的，它的结论就是可以相信的。以一般均衡理论中纯交易经济模型为例子，在该模型中共有 n 种商品进行交易，有 m 个交易者，交易开始时，交易者 k 拥有第 i 商品 w_i^k 单位；当他拥有商品为 $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 时，效用为 $u^k(x)$ ，若 x^k 是如下优化问题的解

$$\begin{aligned} & \max u^k(x) \\ & s. t. \quad \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq \sum_{i=1}^n p_i w_i^k \end{aligned}$$

则交易者 k 在价格 $p=(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 和数量 $x^k(k=1, 2, 3, \dots, m)$ 上达到均衡。可以证明，当效用函数是光滑的、凹的，且商品 x 可分割时，均衡是唯一存在的。在该模型中，我们不必去计算具体的效用函数，也不必真正求解上述优化问题，只要在一定条件下证明解的存在性和唯一性即可。因此在类似模型的研究中多数采用了与数学研究相似的风格，即采用了“公理——定义——定理——证明”这种独特的行文方式，如果抛开其经济学背景，与数学研究并无很大的差别，以至于被一些经济学家质疑：这类研究究竟是不是经济学研究？

其实这种质疑只看到形式，没有看到内容。我们认为，如果它的假设出发点是经济问题，得到的结论符合经济运行实际，就可以认为是经济学研究。采用这种方式研究经济学还可以得到用其他方法难以得到的结论。以社会选择理论为例。社会选择理论是福利经济学的重要组成部分，研究的是如何把个人的偏好集计为集体的（社会的）偏好。集计的方法很多，例如：一致同意法则（如联合国安理会常任理事国的决议法则），多数决法则（即少数服从多数法则），独裁者法则（即由集体中某一个体代表集体决策，将他的偏好当作集体的偏好，而不管其他个体的偏好如何）等等。各种集计法则各有优缺点，怎样的集计法则算是“合理”的呢？关于这个问题，美国经济学家肯尼斯·阿罗（1984年诺贝尔经济学奖得主）作出了杰出的贡

献。他在 1951 年证明了，如果备选方案的个数大于或等于 3 时，满足如下五个条件和社会福利函数（即集计法则）是不存在的：

条件 1：对所有可能的个体偏好的情况，社会福利函数都有相应的偏好与之对应。

条件 2：社会评价与个人评价的正相关。

条件 3：对不相干方案的独立性。

条件 4：社会福利函数是非强加的。

条件 5：社会福利函数是非独裁的。^①

这就是著名的“阿罗不可能性定理”，这个定理也可以这样表述：“如果社会福利函数对所有可能的偏好状态都有定义，满足社会评价与个人评价正相关、对不相干方案的独立性而且是非强加的，那么它必定是独裁的。”这个结论太出乎我们的意料之外了，但是它是用严格的数学方法证明了的，使人们不得不服。当时萨缪尔森曾说“如果世界上真正懂得相对论的人不到 10 个是夸张的话，那么说世界上真正了解阿罗不可能性定理的人不到 12 个却是实在的事实。”这话从现在看来当然是夸张，但也说明这个论题是很难的。从这里我们可以体会到数学模型的独特力量——这个结论用传统的直观方法是无法得到的。

第二类是数据分析模型。这类模型利用现实的经济数据，在一定经济理论框架下进行计算，得出结论。其中最具有代表性的是经济计量模型。经济计量学，按其创立者弗里希所说，是经济理论、统计学和数学的结合，“所有三者的统一才是强有力的，而这种统一就构成经济计量学。”与机制研究模型相比，经济计量模型直接处理现实数据，给人一种结合实际的感觉，因此更容易为经济学家和社会大众所接受。诺贝尔经济学奖也特别青睐这一领域，将她的首次奖授予经济计量学的创立者弗里希和丁伯根，此后曾五次将奖项授予该领域的研究者。支持经济计量模型发展的动力有四个个方面：经济理论、数据资料、经济计量方法和计算技术。近年来这四个方面都有了很大发展，特别是计算机的普及、专用软件的开发，使得以前因计算量过大难以实现的算法现在可以轻易实现，经济计量方法的长足进步使得计量结果更加接近实际，预测更加准确。上世纪八十年代后许多国家和组织纷纷开发大型宏观模型取得很大成功。例如由法国经济预测研究所和国际信息与预测中心共同开发了“世界宏观经济模型”成为分析世界经济机制和前景的有力工具。目前计量经济模型已成为应用最广的一类模型，我们将专文讨论。

第三类是实验仿真模型。仿真模型也称为模拟模型。这里主要指计算机仿真模型，就是在计算机上通过特殊平台再现真实的经济系统，在其中进行有关实验得到相应结论。它可用于直接进行经济模拟实验，例如模拟股市交易等，也可以用于检验某种经济理论。仿真模型可以从相对简单的微观个体活动导出宏观层面的复杂行为，可用于探讨一些未知规律，关于复杂系统的仿真研究已成为有力的研究工具。例如，美国斯塔菲国家实验室开发的 ASPEN 多主体经济仿真模型，在宏微观结构、运行机制方面很接近现实经济系统，克莱茵（诺贝尔经济奖得主）曾说 ASPEN 模型“可能是长期以来出现的最好的东西。”除了计算机仿真之外，近年来蓬勃发展的实验经济学模型很值得注意。实验经济学模型利用受控实验对已有的经济理论进行检验或通过实验发现新经济规律。与计算机仿真不同，实验经济学是将经济活动的主

^① 条件的具体含义及定理证明见文献 2。

体作为实验对象，将活生生的人作为被试来组织实验的。长期以来，人们总是认为经济学是无法进行实验的，连萨缪尔森这样大师级的人物也有这样的看法，他曾在他和诺德豪斯合著的《经济学原理》（第12版）中说：“经济学家检验经济法则的时候，无法进行类似化学家或生物学家的受控实验，因为他们不容易控制其他重要因素。所以只能象天文学家或气象学家那样满足于观测。”但是，实验经济学的发展改变了人们的看法。2002年诺贝尔经济学奖授予被称为“实验经济学之父”的弗农·史密斯，表明了主流经济学界对该学科的肯定。实验经济模型可以用精心设计的实验以达到控制其他“重要因素”的目的而使实验结果体现出主要变量的关系。实验经济模型可以检验标准经济学的原始假定（例如，“经济人假定”）是否正确，还可以处理前两类模型所无法解决的问题，例如关于有效市场假定（EMH）的检验问题。有效市场的假定是现代金融理论的基本假定之一。要检验EMH是否正确，就是要检验“市场中所观测到的价格”是不是等于“反映所有信息的真正的价格”，但是“真正的价格”并无理论模型作为基础。现在的问题是：如果在实证研究中市场观测到的价格与估计的“真实价格”有区别时，我们如何判定是估计错误还是因市场无效率而导致的结果？例如，假定在某一时段中，估计上证指数是2600点，但实际从市场观测到的上证指数是3200点，现在问：此时是因“市场无效率”产生了600点的“泡沫”还是估计本身的错误？这从计量经济模型的逻辑关系上是难以回答的，但这个难题可以用实验经济模型解决。例如，可以设计一个经济系统，这个系统共存在10期，考虑一个股票，该股票每期末产生100分股息，10期到后价值为0，于是第一期持有该股票的价值是 $P_1=10 \times 100=1000$ ，第二期持有该股票的价值是 $P_2=(10-1) \times 100=900$ ，其余类推。每个被试都知道如上事实。因此，“真正的价格”是明确的。若能在实验中观察到被试互相买卖所决定的价格与“真正的价格”相同，则可以认为EMH得到该实验的支持。史密斯等人曾做过类似的实验，实验的结果并不支持EMH。建立实验经济学模型的难点在于实验设计，设计好能达到预期目标的实验方案是取得成功的关键。

（二）数学工具的应用。

在经济模型中应使用怎样的数学工具，历来有不同的意见。有一种观点认为，作为科学的经济学在方法论上应符合“公理化、体系化、逻辑化”的特征，因此推崇以“公理——定义——定理——证明”的形式表述模型，认为这类模型“前提明确、论证严密、可以得到可靠的结论”，复杂的数学结构可以更精确地揭示经济系统的真正规律，应用言语或图表表示的经济模型“不明确”、“不精确”，决不是好模型。另一种观点则认为，经济数学模型是表征经济系统的工具，不可用“过于高深”的数学工具，对于一些较为复杂的数学模型则认为是“用高深的数学形式掩盖其贫乏的经济内容。”

其实这两种观点都失之偏颇。先说第一种观点，我们认为，经济模型的表现形式是多样的，模型“好”还是“不好”，是看它能不能在建模者所研究的范围内尽量接近研究对象的原型，采用什么形式并不重要。魁奈的“经济表”¹就是一个很好的经济模型，该表对资本主义社会财富的生产、流通、分配的运行过程作了简明图示，反映了当时经济系统的运行规律，难道我们可以因为它没有数学公式而低估它的意义吗？马克思的两部类扩大再生产模型虽然没有复杂的数学公式，但却深刻地揭示了经济系统中的宏观动态发展过程，被认为是当代动态

¹ 见魁奈：《魁奈经济著作选集》，商务印书馆，1979年版。

模型先驱。著名经济学家森岛通夫^①指出“可以毫不夸张地说，在卡拉斯基、弗里希和丁伯根之前，除了马克思以外，没有一个经济学家曾获得过以科学的方法严密地建立的宏观动态模型。”认为“他的（指马克思的——引者）模型应该引起我们的极大注目。马克思的模型可以被看作当代的里昂节夫—冯·诺伊曼的原型”。近年来我国学者的研究也得到类似的结论，例如，杨继国认为马克思的再生产模型不仅可以推导出西方增长理论基本模型（其中包括哈罗德—多马模型、新古典增长模型、后凯恩斯主义增长模型和内生增长模型等）还能解释一些西方增长理论无法解释的“人均增长”等问题。

也许有人会说魁奈、马克思等人的经济模型之所以没有复杂的数学公式是由于当时的数学发展水平的关系。其实不然，2005年诺贝尔经济奖得主是两位博弈论专家：托马斯·谢林和罗伯特·奥曼。作为博弈论专家的谢林，他的名著《微观动机与宏观行为》，深刻地探讨了因个体行为而导致的令人惊奇的宏观后果以及宏观后果背后所隐藏着的个体动机。在这部深刻的名著中，谢林并未运用复杂的数学模型。读者只要有中学数学水平就很容易读懂全书，从他设定的简单模型（虽然有的例子不一定很实际）中理解他的深刻思想。

经济学家在研究时采用什么样的模型，在论著中用怎样的写作风格取决于什么样的模型对于解决问题是有效的，而不必过分留意数学工具的复杂或简单。诺贝尔经济奖得主阿马蒂亚·森在贫困研究领域颇有建树，被誉为“经济学的良心”，最为著名的作品是《贫困与饥荒：论权利与剥夺》，在其中森利用“权利体系分析”的方法，阐述了他著名的论断：贫困不单纯是一种供给不足，而更多的是一种权利不足，指出“饥饿是交换权利的函数，而不是食品供给的函数。”他提出了如些重要的与传统观念相左的观点，靠的是严密的逻辑使读者信服。在这本书的正文中并没有引入复杂的数学公式，也没有冗长的公式推导，只在附录中对交换权利和贫困测度作了必要的数学解说。森在前言中指出“本书的分析基本上是非公式的，……即使不参阅附录，理解本书的主要论点（包括案例研究）也不会有任何困难”，可见利用文字叙述也可以完成令人信服的逻辑推理的。由此可见，认为只有复杂的数学公式才能正确反映经济关系的观点是不正确的。

至于第二种观点，即认为“经济模型不必也不可引用过于高深的数学模型”的观点，也是片面的。首先是“高深”并无定义，这是一个非常模糊的概念，实际上高与低，深与浅只是相对而言，可以因人而异，因时而异。一项专门知识从不熟悉它的门外汉看来可能是很“高深”的，而对于熟悉它的业内人士看来可能只是“小菜一碟”；现代科学发展迅速分枝林立，“隔行如隔山”，一个人根本无法精通许多分枝，你认为“深”、我可以认为“浅”，没有客观标准。从时间过程看，原来只有少数人掌握的知识，算是很“深”吧，随着时间的推移逐步传播普及开来，也就是变“浅”了。有人提议将某种人群的专业知识水平当作“深浅”的分界线，例如可将数学专业本科（或研究生）毕业生的数学知识水平当作数学“深浅”的分界线，但是这也是行不通的，因为经济模型所需要的数学知识毕竟不同于数学专业，将经济学等同于数学是没有道理的，况且经济模型需要不断地从其他管科吸收新知识、借鉴新方法以丰富自己的体系。例如，从复杂系统论中借鉴分形、混沌等概念，而其中所利用的数学工

^① 森岛通夫，伦敦经济学院教授，曾任国际经济计量学会会长。以下引文见参考文献3第3页和第148页。

具都是传统数学所未用的。就说分形吧，传统数学告诉我们：直线是1维、平面是2维、立方体是3维，这是容易理解的。分形理论说柯曲折线^①的维数是 $\ln 4 / \ln 3 = 1.2618 \dots$ 。一个图形的维数居然不是整数，你能想象得出吗？然而就是从这个不可思议的概念出发，你可以建立一个股票的分形模型考察它的长期变化规律^②，因此在某种意义上我们可以说，经济模型所需要的恰恰是最“高深”的数学。

（三）量体裁衣。

通过以上讨论，我们认为，在建立模型的过程中，应以所研究的问题为基点，选择适当的模型，应用恰当的数学课工具。所谓适当，就是能解决问题，恰当就是恰如其分。还是以阿马蒂亚·森为例，上文说过《贫困与饥荒》所用的数学工具不多，但森的另外一些论著的风格却与此迥异。他的专著《集体选择与社会福利》在社会选择理论中影响很大，（据说有很多人就是因为读了这本书才走上研究社会选择的道路）其行文风格却是“公理——定义——定理——证明”。在阿罗主编的“数理经济学手册”中^③，森是“社会选择”部分的作者，其行文风格更为数学化，所用的数学工具更为艰深。为什么同一位学者，同样是得奖作品，却有如此不同呢？我认为这是所研究的问题决定的，关于贫困、权利等能用语言讲述清楚的，就不必应用数学；而社会选择的问题，要研究阿罗不可能性定理这样的难题，不用艰深的数学模型就不足以解决问题。对特定的问题用特定的方法，这也是顶级学者值得我们学习之处。中国有句古话“看菜吃饭，量体裁衣”，这就是说研究什么样的问题，就要用什么样的方法。我们在选择模型、选用方法时也应取这样的态度，能用语言说明清楚的就不要使用数学，能用简单式子说明的就不要用复杂的式子，“简单就是美”。当然，如果非艰深的模型不能解决问题我们也不必回避。总之，能解决问题的模型就是好模型。

参考文献：

1. 余斌：对《国有企业民营化的均衡模型》的质疑，《晋阳学刊》，2005年第5期。
2. 肯尼斯·阿罗：《社会选择与个人价值》，四川人民出版社，1987年版。
3. 森岛通夫：《马克思的经济学》，上海人民出版社，1990年版。
4. 杨继国：《马克思的增长理论现与代增长理论比较研究》，《南开经济研究》，2001年第4期。
5. 托马斯·谢琳：《微观动机与宏观行为》，中国人民大学出版社，2005年版。
6. 阿马蒂亚·森：《贫困与饥荒：论权利与剥夺》，商务印书馆，2001年版。
7. 林鸿益等：《分形论》，北京理工大学出版社，1992年版。
8. E·彼得斯：《分形市场分析》，经济科学出版社，2002年版。

作者单位：厦门大学经济学院

邮 编：361005

① 柯曲折线的构造如下：设 E_0 是长度为 a 的线段， E_1 是由 E_0 舍去中间 $1/3$ 的线段，而改变为夹角为 60° 的两段（长度为 $a/3$ ）的折线。即在被舍弃的线段上形成等边三角形的两条连同样对 E_1 的每条边操作以上舍弃方法构造出 E_2, \dots ，如此继续，以至无穷。参见文献 7，第 87 页。

② 见参考文献 8。

③ 见 K. J. Arrow et al., Handbook of Mathematical Economics, Vol. ■, Elsevier Science pub. C. I. 1986.