

文章编号: 0455-2059(2001)06-0006-03

NWUC 寿命分布类的一个充分条件

李效虎¹, 伍锦棠²

(1. 兰州大学 数学系, 甘肃 兰州 730000; 2. 华侨大学 信息管理系, 福建 泉州 362011)

摘要: 讨论 NWUC 寿命分布类, 证明了若一个更新过程的剩余寿命函数随时间依凸序随机递增, 则其到达间隔是 NWUC 的.

关键词: 可靠性; NWUC; 剩余寿命; 凸序; 更新过程

中图分类号: O212.2 文献标识码: A

在可靠性分析中, 按年龄性质对元件分类是十分有意义的. IFR, IFRA, NBU, NBUE, HNBUE 作为正年龄概念在维修策略的研究中有良好的应用^[1,2], 其共同特征乃是新元件较之旧元件有更长的寿命. 作为上述的对偶有所谓的负年龄概念 DFR, DFRA, NWU, NWUE, HNWUE. 令 X 为一个非负随机变量, 表示一个具有分布函数 $F(t)$ 的元件的寿命, 其生存函数是 $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$, 以 $X_t = X - t | X > t$ 表示该元件在年龄点 $t > 0$ 的剩余寿命. 如果对所有 $t \geq 0$, X_t 随机地小于 X , 则 F 属于 NBU 类. 若对所有 $t \geq 0$, EX_t 小于 X , 则 F 属于 NBUE 类. Cao 等^[3] 依据下面的随机凸序提出一类新的寿命分布. 关于随机凸序可参阅文 [4, 5].

定义 1 若随机变量 X, Y 满足: 对所有的不减凸函数 h

$$Eh(X) \geq Eh(Y),$$

则称 X 依凸序随机大于 Y , 记作 $Y <_{icx} X$.

定义 2 称 F 是 NBUC (new better than used in convex ordering) 的, 如果对所有 $t \geq 0$, X_t 依凸序随机地小于 X . 此即

$$\int_y^{\infty} \bar{F}(t+x) dx \leq \bar{F}(t) \int_y^{\infty} \bar{F}(x) dx, \quad y, t \geq 0. \quad (1)$$

当然, 若上面不等式反向, 则称 F 是 NWUC (New worse than used in convex ordering) 的. 不难证明

$$NBU \Rightarrow NBUC \Rightarrow NBUE \Rightarrow HNBUE,$$

$$NWU \Rightarrow NWUC \Rightarrow NWUE \Rightarrow HNWUE.$$

Chen^[6] 获得了 NBU (NWU) 和 NBUE (NWUE) 的一个充分条件: 若一个更新过程的剩余寿命函数随时间随机递(减)增, 则其到达间隔是 NBU (NWU) 的; 若一个更新过程的平均剩余寿命函数随时间递(减)增, 则其到达间隔是 NBUE (NWUE) 的. Li 等^[7] 通过对更新过程的剩余寿命和凸序的讨论获得一个到达间隔为 NBUC 相对应的充分条件. 本文则讨论有关

收稿日期: 2001-02-26.

基金项目: 国家自然科学基金委员会数学天元基金 (TY 10126014) 和兰州大学博士启动基金资助项目.

作者简介: 李效虎 (1969-), 男, 副教授, 博士.

NWUC 的相应结果.

令 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列独立同分布的非负随机变量序列, 其分布为 F , 假定 $F(0) = 0$. 记 $S_0 = 0$, 对 $n \geq 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 定义 $N(t) = \sup\{n: S_n \leq t\}$, $t \geq 0$, 则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个更新计数过程. 以 $V(t)$ 表示年龄点 $t \geq 0$ 的剩余寿命, 即 $V(t) = S_{N(t)+1} - t$. Chen^[6] 证明: 若 $V(t)$ 关于时间 $t \geq 0$ 随机递增, 则 F 是 NWU 的; 若 $E(V(0)) = EX_1 < \infty$ 且 $EV(t)$ 关于时间 $t \geq 0$ 递增, 则 F 是 NWUE 的; Li 等^[7] 证明: 若 $V(t)$ 关于时间 t 依凸序随机递减, 则 F 是 NBUC 的. 这里证明对于 NWUC 寿命分布类也有类似的结果.

定理 3 若 $V(t)$ 关于时间 $t \geq 0$ 依凸序随机递增, 则 F 是 NWUC 的.

证明 记

$$g(t, x) = P(V(t) \geq x), \quad t \geq 0, x \geq 0$$

为过程 $N(t)$ 在 t 时刻剩余寿命的生存函数, 由条件概率^[8] 有

$$g(t, x) = \bar{F}(t+x) + \int_0^t g(t-s, x) dF(s), \quad (2)$$

由 Stoyan^[4], X 依凸序小于 Y (具有分布函数 G) 当且仅当

$$\int_x^\infty \bar{F}(t) dt \leq \int_x^\infty \bar{G}(t) dt. \quad (3)$$

根据 (2), 对所有 $y \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_y^\infty g(t, x) dx &= \int_y^\infty \bar{F}(t+x) dx + \int_y^\infty \int_0^t g(t-s, x) dF(s) dx \\ &= \Delta_1 + \Delta_2. \end{aligned}$$

$V(t)$ 关于 $t \geq 0$ 依凸序递增, 由 (3) 及 Fubini 有

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \int_0^t \int_y^\infty g(t-s, x) dx dF(s) \\ &\leq \int_0^t \int_y^\infty g(t, x) dx dF(s) \\ &= \int_y^\infty \int_0^t g(t, x) dF(s) dx \\ &= F(t) \int_0^t g(t, x) dx. \end{aligned}$$

这样, 对所有 $y \geq 0$

$$\int_y^\infty g(t, x) dx \leq \int_y^\infty \bar{F}(t+x) dx + F(t) \int_y^\infty g(t, x) dx.$$

也即, 对所有 $y \geq 0$

$$\int_y^\infty \bar{F}(t+x) dx \geq \bar{F}(t) \int_y^\infty g(t, x) dx. \quad (4)$$

另外, 对 $t \geq 0$, $X_1 = V(0) \leq_{icx} V(t)$. F 是到达间隔的分布, 则对所有 $y \geq 0, t \geq 0$

$$\int_y^\infty g(t, x) dx = \int_y^\infty P(V(t)) dx \geq \int_y^\infty \bar{F}(x) dx. \quad (5)$$

由 (4), (5), 对所有 $t \geq 0, y \geq 0$

$$\int_y^\infty \bar{F}(t+x) dx \geq \bar{F}(t) \int_y^\infty \bar{F}(x) dx,$$

此即表明 F 是 NWUC 的.

由定理 3 及文 [6] 中的定理 1 和定理 2 有

$$\begin{array}{ccc}
 V(t) \uparrow_{st} \text{ in } t \geq 0 \Rightarrow \text{NWU interarrivals} & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 V(t) \uparrow_{icx} \text{ in } t \geq 0 \Rightarrow \text{NWUC interarrivals} & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 V(t) \uparrow \text{ in } t \geq 0 \Rightarrow \text{NWUE interarrivals} & &
 \end{array}$$

参 考 文 献

- [1] Barlow R E, Proschan F. Statistical Theory of Reliability and Life Testing [M]. Madison: Silver Spring, 1981.
- [2] Bryson M C, Siddiqui M M. Some criteria for aging[J]. Journal of American Statistical Association, 1969, 64: 1472-1483.
- [3] Cao J, Wang Y. The NBUC and NWUC classes of life distributions [J]. Journal of Applied Probability, 1991, 28: 473-479.
- [4] Stoyan D. Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models [M]. New York: Wiley, 1983.
- [5] Shaked M, Shanthikumar J. Stochastic Orders and Their Applications [M]. San Diego: Academic Press, 1994.
- [6] Chen Y. Classes of life distributions and renewal counting process [J]. Journal of Applied Probability, 1994, 31: 1110-1115.
- [7] Li X, Li Z, Jing B. Some new results about the NBUC class of life distributions [J]. Statistics and Probability Letters, 2000, 46: 229-237.
- [8] Karlin S, Taylor H M. A First Course in Stochastic Process, 2nd edition [M]. New York: Academic Press, 1975.

A Sufficient Condition for the NWUE Class of Life Distributions

Li Xiaohu¹, Wu Jintang²

(1. Department of Mathematics, Lanzhou University, Lanzhou, 730000, China;

2. Department of Management & Information Science, Huaqiao University, Quanzhou, 362011, China)

Abstract The NWUC class of life distributions and the renewal process are dealt with. It is shown that, if the excess lifetime of a renewal process is stochastically increasing with respect to time ≥ 0 in terms of increasing convex ordering, then the interarrival is of NWUC property. This supplements those results from Chen (1994) and Li, *et al* (2000).

Key words NWUC; reliability; increasing convex ordering; excess lifetime; renewal process

MR(1991) Subject Classifications 62E10; 60K10