DOI:10.13885/j.issn.0455-2059.2004.06.001

文章编号: 0455-2059(2004)06-0001-03

广义试验总时间变换序的一些性质

李效虎[1], 郝学奎[2]
(1. 兰州大学 数学与统计学院, 甘肃 兰州 730000;
2. 兰州工业高等专科学校 基础学科部, 甘肃 兰州 730050)

摘　要: 研究了广义试验总时间变换序与年龄性质IFR (increasing failure rate), DFR (decreasing failure rate) 的关系以及其关于样本最小与样本最大的封闭性.

关键词: DFR; IFR; 试验总时间变换; 串联; 并联
中图分类号: O212.2　　**文献标识码:** A

1 预备知识

设X, Y和Z是3个连续型随机变量, X与Z非负, f, g与k分别是其密度函数, 其分布函数分别是F, G, K, 记$\bar{F}=1-F$, $\bar{G}=1-G$, $\bar{K}=1-K$. 令

$$F^{-1}(p)=\sup\{x\colon F(x)\le p\},$$
$$G^{-1}(p)=\sup\{x\colon G(x)\le p\},$$
$$K^{-1}(p)=\sup\{x\colon K(x)\le p\}$$

为各自的p-分位点, 其中$0<p<1$.

X与Z的试验总时间 (total time on test) 变换分别为, 对于$0<p<1$,

$$T_X(p)=\int_0^{F^{-1}(p)}\bar{F}(t)\mathrm{d}t,$$
$$T_Z(p)=\int_0^{K^{-1}(p)}\bar{K}(t)\mathrm{d}t.$$

试验总时间变换概念的建立归功于Barlow等[1], 随后为Klefsjö[1~5]所发展.

下面的随机序关系是由Kochar等[4]提出的, Kochar等[4]同时研究了试验总时间变换序与色散序 (disperive order)、随机序、递增凹序的联系, 并且给出了一些很好的应用. 关于这些序关系的细节可参阅专著[6]和[7].

定义1 Z依试验总时间变换序大于X (记作$X\le_{\rm ttt}Z$), 如果

$$T_X(p)\le T_Z(p),\quad 对所有1>p>0. \qquad (1)$$

不难证明

$$X\le_{\rm st}Z\Longrightarrow X\le_{\rm ttt}Z.$$

X与Z关于Y的广义试验总时间 (generalized total time on test)变换分别为, 对$0<p<1$,

$$H_X^{-1}(p)=\int_0^{F^{-1}(p)}g\circ G^{-1}(F(t))\mathrm{d}t,$$
$$H_Z^{-1}(p)=\int_0^{K^{-1}(p)}g\circ G^{-1}(K(t))\mathrm{d}t,$$

容易看出当$Y\sim\mathcal{E}(1)$时, $H_X^{-1}(p)=T_X(p)$. 广义试验总时间变换的提出归功于Barlow等 (Barlow R E, Doksum K A. Isotonic test for convex orderings, Proceeding of the 6th Berkeley Symposium of Mathematical Statistics and Probability I. 1972, 293-323.), 他们利用这个结构建立了1个IFR序关系的非参数检验方法. Bartoszewicz[3]为它的进一步发展作出了突出的工作.

本文要考虑的是下面的随机变量间的一个新的偏序关系.

定义2 Z依广义试验总时间变换序大于X (记作$X\le_{\rm gttt}Z$), 如果

$$H_X^{-1}(p)\le H_Z^{-1}(p),\quad 对所有1>p>0. \qquad (2)$$

不难得到广义试验总时间变换序与试验总时间变换序之间的简单关系: 当$Y\sim\mathcal{E}(1)$时,

$$X\le_{\rm gttt}Z\Longleftrightarrow X\le_{\rm ttt}Z.$$

元件的年龄性质在可靠性理论中具有重要的意义, IFR是即将用到的一个寿命分布类.

定义3 非负随机变量Y或者其分布G称作是失效率递增 (IFR) 的, 如果其失效率函数$g(x)/\bar{G}(x)$关于$t\ge 0$递增.

非负随机变量Y或者其分布G称作是失效率递减 (DFR) 的, 如果其失效率函数$g(x)/\bar{G}(x)$关于$t\ge 0$递减.

收稿日期: 2003-04-30.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10201010).
作者简介: 李效虎(1969-), 男, 教授, 博士.

有关IFR寿命分布类以及IFR序关系可参阅Barlow等的专著[8].

本文首先讨论了广义试验总时间变换序与试验总时间变换序之间的推出关系, 随机变量Y的IFR或DFR性质是密切相关的条件; 其次, 研究了广义试验总时间变换序关于样本最小与样本最大的封闭性.

为方便计, 以下部分当用到时总假定均值存在, 递增或递减都是指非严格意义下的单调性.

2 主要结论

Barlow等[8]曾经指出下面的结论, 为引用方便, 本文以引理的形式列出.

引理1 设W是区间(a, b)上的一个测度(不必为正),

$$\int_a^t \mathrm{d}W(x) \geq 0, \quad 对所有 t \in (a, b).$$

若h是一个定义于(a, b)非负的递减函数, 则

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}W(x) \geq 0.$$

第1个主要结论探讨广义试验总时间变换序与试验总时间变换序之间的关系.

定理1 (i) 设G是IFR的, 则

$$X \leq_{\mathrm{gttt}} Z \Longrightarrow X \leq_{\mathrm{ttt}} Z.$$

(ii) 设G是DFR的, 则

$$X \leq_{\mathrm{ttt}} Z \Longrightarrow X \leq_{\mathrm{gttt}} Z.$$

证明 (i) 对所有$p \in (0, 1)$, $H_X^{-1}(p, G) \leq H_Z^{-1}(p, G)$等价于

$$\int_0^{K^{-1}(p)} g(G^{-1}K(x))\mathrm{d}x - \int_0^{F^{-1}(p)} g(G^{-1}F(x))\mathrm{d}x = \int_0^p g(G^{-1}(u))\mathrm{d}(K^{-1}(u) - F^{-1}(u)) \geq 0, \quad p \in (0, 1).$$

由于Y是IFR的, 其失效率函数$g(t)/\bar{G}(t)$关于$t \geq 0$递增, 因此, $(1-u)/g(G^{-1}(u))$关于$u \in (0, 1)$递减. 根据引理1, 对所有$p \in (0, 1)$,

$$\int_0^p (1-u)\mathrm{d}(K^{-1}(u) - F^{-1}(u)) \geq 0.$$

此式亦即

$$T_X(p) = \int_0^{F^{-1}(p)} \bar{F}(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^{K^{-1}(p)} \bar{K}(x)\mathrm{d}x = T_Z(p).$$

从而, $X \leq_{\mathrm{ttt}} Z$成立.

(ii) 注意到Y的DFR性表明$g(G^{-1}(u))/(1-u)$关于$u \in (0, 1)$递减, 同(i)可以完全类似地证明.

利用定理1可以直接得到如下的结论.

推论1 假设G是IFR的, G_1是DFR的. 若关于G成立$X \leq_{\mathrm{gttt}} Z$, 则关于G_1也成立$X \leq_{\mathrm{gttt}} Z$.

第2个主要结论涉及样本的最大值与最小值, 在可靠性理论中, 这两个运算分别对应着并联与串联结构.

定理2 假设$X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n$与$Z_1, \cdots, Z_n$是分别来自总体$X$, Y与Z的简单随机样本.

(i) 若关于Y_i有$X_i \leq_{\mathrm{gttt}} Z_i$ $(i = 1, \cdots, n)$, 则关于$\min\limits_{1\leq i\leq n} Y_i$成立$\min\limits_{1\leq i\leq n} X_i \leq_{\mathrm{gttt}} \min\limits_{1\leq i\leq n} Z_i$.

(ii) 若关于$\max\limits_{1\leq i\leq n} Y_i$有$\max\limits_{1\leq i\leq n} X_i \leq_{\mathrm{gttt}} \max\limits_{1\leq i\leq n} Z_i$, 则关于$Y_i$成立$X_i \leq_{\mathrm{gttt}} Z_i$ $(i = 1, \cdots, n)$.

证明 记$F_{1:n}$, $G_{1:n}$和$K_{1:n}$分别是$\min\limits_{1\leq i\leq n} X_i$, $\min\limits_{1\leq i\leq n} Y_i$和$\min\limits_{1\leq i\leq n} Z_i$的分布函数, $F_{n:n}$, $G_{n:n}$和$K_{n:n}$分别是$\max\limits_{1\leq i\leq n} X_i$, $\max\limits_{1\leq i\leq n} Y_i$和$\max\limits_{1\leq i\leq n} Z_i$的分布函数. Barlow等[10]已经证明: 对所有$x \geq 0$,

$$G_{1:n}^{-1} \circ F_{1:n}(x) = G^{-1} \circ F(x) = G_{n:n}^{-1} \circ F_{n:n}(x),$$

$$K_{1:n}^{-1} \circ F_{1:n}(x) = K^{-1} \circ F(x) = K_{n:n}^{-1} \circ F_{n:n}(x).$$

(i) 注意到关于Y_i成立$X_i \leq_{\mathrm{gttt}} Z_i$, 对所有$t \geq 0$,

$$\int_0^t g(G_{1:n}^{-1} \circ F_{1:n}(x))\mathrm{d}(K_{1:n}^{-1} \circ F_{1:n}(x) - x) = \int_0^t g(G^{-1} \circ F(x))\mathrm{d}(K^{-1} \circ F(x) - x) \geq 0,$$

而$\min\limits_{1\leq i\leq n} Y_i$具有密度函数$ng(x)\bar{G}^{n-1}(x)$, 由于$n\bar{G}^{n-1}(x)$非负递减, 由引理1知, 对所有$t \geq 0$,

$$\int_0^t ng(G_{1:n}^{-1} \circ F_{1:n}(x))\bar{G}^{n-1}(G_{1:n}^{-1} \circ F_{1:n}(x)) \cdot \mathrm{d}(K_{1:n}^{-1} \circ F_{1:n}(x) - x) \geq 0.$$

由此立即得到结论.

(ii) $\max\limits_{1\leq i\leq n} Y_i$具有密度函数$ng(x)G^{n-1}(x)$, 关于$\max\limits_{1\leq i\leq n} Z_i$的$X_i \leq_{\mathrm{gttt}} Y_i$表明, 对所有$t \geq 0$,

$$\int_0^t ng(G_{n:n}^{-1} \circ F_{n:n}(x))G^{n-1}(G_{n:n}^{-1} \circ F_{n:n}(x)) \cdot \mathrm{d}(K_{n:n}^{-1} \circ F_{n:n}(x) - x) = \int_0^t ng(G^{-1} \circ F(x))F^{n-1}(x)\mathrm{d}(K^{-1} \circ F(x) - x) \geq 0.$$

因为$1/nG^{n-1}(x)$非负递减, 由引理1, 对所有$t \geq 0$,

$$\int_0^t g(G^{-1} \circ F(x))\mathrm{d}(K^{-1} \circ F(x) - x) \geq 0.$$

此即$X \leq_{\mathrm{ttt}} Y$.

参 考 文 献

[1] Barlow R E, Campo R. Total time on test processes and applications to failure data analysis[A]. Barlow R E, Fursell J, Singpurwalla eds. Reliability and Fault Tree Analysis[C]. Philadelphia: SIAM, 1975, 451-481.

[2] Bartoszewicz J. Dispersive ordering and the total time on test transformation[J]. Statistics and Probability Letters, 1986, 4(2): 285-288.

[3] Bartoszewicz J. Stochastic order relations and the total time on test transformation[J]. Statistics and Probability Letters, 1995, 22(1): 103-110.

[4] Kochar S C, Li X, Shaked M. The total time on test transform order and the excess wealth stochastic orders of life distributions[J]. Advances in Applied Probability, 2002, 34(4): 826-845.

[5] Neath A V, Samaniego F J. On the total time on test transform of an IFRA distribution[J]. Statistics and Probability Letters, 1992, 14(2): 289-291.

[6] Müller A, Stoyan D. Comparison methods for stochastic models and risks[M]. New York: John Wiley & Sons, 2002.

[7] Shaked M, Shanthikumar J G. Stochastic Orders and Their Applications[M]. San Diago: Academic Press, 1994.

[8] Barlow R E, Proschan F. Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models[M]. Silver Spring, To Begin with, MD, 1981.

Some properties of the generalized total time on test transform order with applications

LI Xiao-hu[1], *HAO Xue-kui*[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou, 730000, China;

2. Department of Basic Courses, Lanzhou High Industrial College, Lanzhou, 730050, China)

Abstract: The relationship between the generalized TTT transform order and the usual TTT transform order is investigated, it is founded that the implications are close related to the IFR or DFR property of the life distribution G. We also develop the preservation properties of the generalized TTT trasform order under the taking of maxima and minima of i.i.d. components.

Key words: DFR; IFR; generalized TTT transform; series system; parallel system

AMS Subject Classifications(2000): 62E10; 60K10