

基于波前传播时间插值的三维声线追踪算法*

黄月琴 张健中

(厦门大学信息科学与技术学院 厦门 361005)

2007 年 2 月 20 日收到

2007 年 8 月 18 日定稿

摘要 研究了先正向计算波前传播时间,再根据波前传播时间反向确定声线路径的三维非均匀介质声线追踪算法。在正向步骤,根据程函方程,使用基于水平集的 GMM(Group Marching Method)波前扩展算法,从声源开始,逐步计算离散介质网格节点上的波前传播时间。在反向步骤,利用正向步骤计算出的网格节点上的波前传播时间,从接收点开始,向声源方向逐单元追踪声线路径。在每个长方体单元内,首先把任意点上的波前传播时间用该单元网格节点上的已知波前传播时间的线性插值函数来表示,再根据 Fermat 原理,提出了确定三维声线路径的方法。实验结果表明,本文方法提高了三维声线追踪的精度和计算速度。

PACS 数: 43.60

A three-dimensional sound ray tracing algorithm based on wavefront traveltimes interpolation

HUANG Yueqin ZHANG Jianzhong

(School of Information Science and Technology, Xiamen University Xiamen 361005)

Received Feb. 20, 2007

Revised Aug. 18, 2007

Abstract A kind of three-dimensional (3-D) sound ray tracing algorithm in heterogeneous media is studied. This algorithm includes two steps: wavefront traveltimes computation forward and sound ray tracing based on wavefront traveltimes backward. In forward step, we found on Eikonal equation and use GMM (Group marching method) wavefront marching method based on level set to compute wavefront traveltimes on discrete grid points step by step, beginning with sound source. In backward step, sound ray tracing is proceeded from receiver to each cell towards sound source in steps, with wavefront traveltimes computed in the forward step. Wavefront traveltimes on arbitrary positions in each cuboid cell can be expressed with linear interpolating function about wavefront traveltimes on grid points of the same cell. And so an algorithm of 3-D sound ray tracing in heterogeneous media is put forward. The simulation results indicate that this method can improve both precision and efficiency of 3-D sound ray tracing greatly.

引言

在非均匀介质中,声波传播路径复杂变化。在声波计算机层析成像中,需要确定声波传播路径。根据几何声学理论获取声波在介质中的传播路径的声线追踪算法,不仅是声波层析成像不可或缺的重要技术,而且为研究和刻画非均匀介质中声波的传播规律提供了一种简便和有效的途径。近年来,许多学者对于三维声线追踪的问题作了大量的研究^[1-5]。例

如,高尔根等(2002)根据三点扰动法的原理提出的整体迭代射线追踪方法^[1],是一种拟弯曲法,但是该方法总体误差难以控制,效率较低并且依赖于初始取值。姜薇等(2005)将二维空间的三角形前向伸展算法扩展到三维空间,提出了三维声线追踪的正三棱锥前向伸展算法^[3],比传统的三维算法更加简洁,但是在满足大的数据处理和较高精度的要求时仍需要很大的计算量,因而在实际应用中有一定的局限性。总之,这类声线追踪算法大部分都是给定声源位置和

* 福建省自然科学基金计划资助项目(2006J0044)和厦门大学 985 二期信息创新平台项目(0000-X07204)资助

声线发射角, 并利用 Snell 定律直接确定声线路径。在给定一对源点和接收点的情况下, 这类算法需要多次试验不同的发射角, 才能获得这对源点和接收点之间的声线路径。当介质声速复杂变化时, 难以获得精确的声线路径。而且, 一次追踪只能得到声源到一个接收点的声线路径, 当接收点较多时, 所花计算时间较多。另一类方法是根据已经计算的模型离散网格节点上的波前传播时间, 从接收点出发, 向源点方向, 逐步追踪具有波前传播时间最大梯度值的网格节点, 并将这些节点依次相连, 从而得到相应的射线路径^[6-7]。这类算法虽然稳定性较高, 但这样获得的射线路径往往呈折线状, 比实际路径长, 由此获得的波传播时间也系统偏大。

根据几何声学理论, 声线与波前面相互垂直。如果知道了波前面, 就可利用它来获取声线路径。这样, 声线追踪问题就可以分成二个完全不同的问题来解决, 一个是从声源开始, 沿波传播方向确定波前面, 即计算声源到介质各处的波前传播时间(波前传播时间的等时面便是对应时刻的波前面); 一个是从接收点开始, 根据计算的波前传播时间, 反向追踪声线路径。这也是地震波射线追踪常用的一种方案。第一个问题可以用有关波前扩展的算法来解决。Sethian(1999, 2001) 提出的基于水平集的波前快速推进方法(FMM, Fast Marching Method)^[8-9]是目前最流行的算法^[8-10]。把复杂介质用三维规格网格离散化后, 从源点开始, 不断找出当前次级源的位置, 并由该次级源的波前传播时间, 通过用有限差分求解方程, 求出与之相邻的各个网格节点上的波前传播时间。这样逐级向外推进, 直至计算出所有网格节点上的波前传播时间。该算法的计算复杂度为 $O(N \log N)$, 其中, N 为网格节点总数。为提高运行速度, Kim(2002) 对 FMM 进行了改进, 在不违反波传播因果律的条件下, 每次同时由多个次级源向外推进, 提出了 GMM 方法^[11](Group Marching Method), 使该算法的计算复杂度降为 $O(N)$ 。我们采用 GMM 方法, 并用有限差分求解方程计算三维介质各点的波前传播时间。

正如前面所述, 对于根据网格节点上的波前传播时间确定声波传播路径的问题, 追踪并连接具有波前传播时间最大梯度值的网格节点的一类声线追踪算法具有最强的稳定性。张建中等(2004) 提出的动态网络最短路径射线追踪方法^[12]很好地克服了二维射线追踪中这类方法存在的“折线”缺陷。为了得到三维介质中更准确的声线路径, 在一个长方体网格单元内波前传播时间线性变化的假设下, 我们把

单元内任意点上的波前传播时间, 用该单元网格节点上的已知波前传播时间的线性插值函数来表示, 再按照 Fermat 原理确定声线的具体路径, 从而解决了这类三维方法的缺点, 极大地提高了三维声线追踪的精度。

1 原理和方法

1.1 波前传播时间计算

在高频近似条件下, 复杂三维介质中声波传播时间满足下列程函方程:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x, y, z)}, \quad (1)$$

式中, t 表示波前传播时间, $v(x, y, z)$ 表示点 (x, y, z) 处的声速。把三维复杂介质离散成长方体单元, 利用一阶差分公式, 得到(1)式的离散近似形式:

$$\left(\frac{t_{i+1,j,k} - t_{i,j,k}}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{t_{i,j+1,k} - t_{i,j,k}}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{t_{i,j,k+1} - t_{i,j,k}}{\Delta z}\right)^2 = \frac{1}{v_{i,j,k}^2}, \quad (2)$$

其中, i, j, k 分别表示沿 x, y 和 z 坐标轴方向上的离散模型网格点编号, $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 分别为 x, y 和 z 方向上的离散网格距。若 $t_{i+1,j,k}, t_{i,j+1,k}, t_{i,j,k+1}$ 已知, 那么就可以由上式求出未知波前传播时间 $t_{i,j,k}$ 。为了提高差分精度, 本文采用二阶差分, 如 x 轴方向上的二阶差分表达式为:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{3t_{i,j,k} - 4t_{i+1,j,k} + t_{i+2,j,k}}{2\Delta x}. \quad (3)$$

利用上述程函方程有限差分法可由已知波前传播时间求得相邻节点上的波前传播时间。我们的目的是要计算出从声源到每个网格节点上的波前传播时间, 波前传播时间的等时面便是各时刻的波前面。FMM 算法^[8-9]从声源开始逐步向外推进, 用上述离散程函方程计算与当前波前相邻的节点上的波前传播时间, 二维情形的推进过程如图 1 所示。在每次推进时, 需要在当前波前附近的窄带(图 1 中圆圈所在的阴影带, 称之为波前窄带)选取具有最小波前传播时间的节点, 再以该点作为次级声源向外扩展波前。但是, 每次扩展过程中, 在波前窄带中寻找具有最小波前传播时间的节点所花费的时间较多, 而且每次只能从一处向外扩展波前, 使得该算法的计算效率不高。GMM 算法^[11]对 FMM 算法进行了发展, 不需要对波前窄带中的点进行排序来寻找具有最小波前传播时间的节点, 而是在保证传播时间因果性的条件下, 找出多个次级声源同时向外扩展波前, 从而大大提高了运算效率。

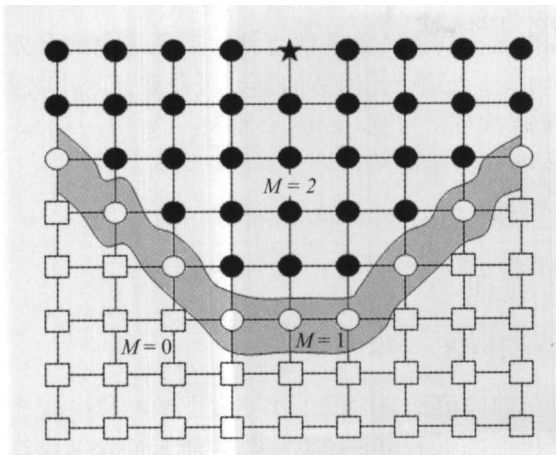


图 1 GMM 的二维情形。星号代表声源，实心圆代表已确定波前传播时间的节点。空心圆表示已经计算过但还未确定是波前传播时间的节点，这些点组成了波前窄带。空心方格表示还未计算波前传播时间的节点。

记当前的波前窄带为 Γ ，根据 Kim 方法^[11]，若 Γ 内相邻节点的波前传播时间之差小于下式确定的值，那么这两个节点的连线将趋于垂直于波前法线方向，

$$\delta t_{\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}{v_{\Gamma, \max}}, \quad (4)$$

其中， $v_{\Gamma, \max}$ 表示波前窄带内各网格节点的最大声速。 Γ 内的多个次级声源 G 选择如下：

$$G = \{(i, j, k) \in \Gamma : t(i, j, k) \leq t_{\Gamma, \min} + \delta t_{\Gamma}\}, \quad (5)$$

其中， $t_{\Gamma, \min}$ 为 Γ 内的最小波前传播时间。

如图 1 所示，记 $M=0$ 表示还未计算波前传播时间的节点， $M=1$ 表示计算过但还未确定是波前传播时间的节点， $M=2$ 表示已确定波前传播时间的节点。GMM 的算法描述如下：

(1) 初始化：

(1.1) 为所有节点赋足够大的波前传播时间初值，如 $t_{i,j,k} = 10^5$ ；

(1.2) 将所有节点标记为 $M_{i,j,k} = 0$ ；

(1.3) 在包含声源的 $2 \times 2 \times 2$ 单元内，

(a) 将声源标记为 $M_{i_0, j_0, k_0} = 2$ ；

(b) 令声源的波前传播时间为零，计算其它节点上的波前传播时间；

(c) 将计算的各个节点的坐标 (i, j, k) 保存到 Γ 中，并标记为 $M_{i,j,k} = 1$ ；

(2) 扩展过程：

(2.1) 令 Γ 中所有节点的最小波前传播时间和最大声速分别为 $t_{\Gamma, \min}$ 和 $v_{\Gamma, \max}$ ；

(2.2) 根据 (4) 式计算 δt_{Γ} ，且令 $t_{\Gamma, \min} = t_{\Gamma, \min} + \delta t_{\Gamma}$ ；

(2.3) 对于 Γ 中的各个节点 (i, j, k) ，若满足 $t_{i,j,k} \leq t_{\Gamma, \min}$ ：

(a) 利用程函方程公式更新与之相邻的节点 (l, m, n) 中满足 $M_{l,m,n} = 1$ 的各个节点的波前传播时间。若相邻节点 (l, m, n) 满足 $M_{l,m,n} = 0$ ，则利用程函方程公式计算该节点 (l, m, n) 上的波前传播时间，且令 $M_{l,m,n} = 1$ ，并把该节点 (l, m, n) 保存到 Γ 中。

(b) 将点 (i, j, k) 移出 Γ 集合，并令 $M_{i,j,k} = 2$ 。

(2.4) 若 Γ 集合非空，则转回到 (2.1)。

1.2 声线路径确定

计算出离散介质所有网格节点上的波前传播时间后，根据互换原理，从接收点开始，反向确定满足 Fermat 原理的声线在相应单元界面上的位置，直至进行到声源所在单元为止，从而获得相应的声线路径。在这个过程中，我们需要不断地在一个长方体单元内确定声线路径。

假定图 2 所示长方体单元内声速均匀，声线为直线，该单元在 x, y, z 方向上的长度分别为 $\Delta x, \Delta y$ 和 Δz 。设接收点 R 在该单元内部或某个界面上，且坐标为 (x_R, y_R, z_R) 。那么，根据波传播的最小时间原理，确定该单元内的声线问题就转化为，在该单元界面上求一点 S ，使声波从 S 到 R 的传播时间达到最小。假设所求的点 S 位于图 2 所示长方体单元的左界面上，坐标记为 (x_S, y_S, z_S) 。若该长方体单元左界面上四个顶点 A, B, C, D 的坐标分别为 (x_S, y_1, z_1) ， (x_S, y_2, z_1) ， (x_S, y_1, z_3) 和 (x_S, y_2, z_3) ，且他们对应的已知波前传播时间分别为 t_1, t_2, t_3 和 t_4 。假设该面内波前传播时间线性变化，那么 S 处的波前传播时间可用界面四个顶点上波前传播时间的双线性插值函数表示为：

$$t_S = \frac{(t_2 - t_1) - (t_4 - t_3)}{\Delta y \Delta z} gh + \frac{t_2 - t_1 + t_4 - t_3}{2 \Delta y} g + \frac{t_1 - t_3 + t_2 - t_4}{2 \Delta z} h + \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4}, \quad (6)$$

其中， $g = y_S - y_0$ ， $h = z_S - z_0$ ， y_0 和 z_0 分别为该界面在 y 和 z 方向上的中点坐标，即 $y_0 = (y_1 + y_2)/2$ ， $z_0 = (z_1 + z_3)/2$ 。这时，声波经过 S 到达 R 的传播时间可表示为：

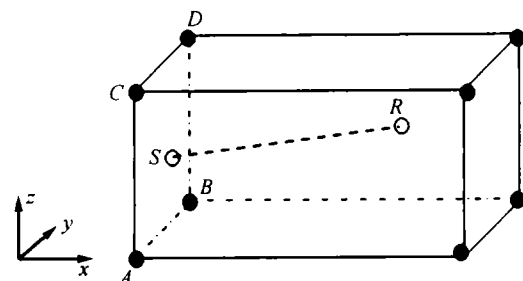


图 2 长方体单元内声线穿过某一界面 $ABCD$ 到达某一点 R 的几何关系。 A, B, C, D 为单元左界面的顶点。 S 为声线与 $ABCD$ 界面的交点， R 为接收点。

$$t_R = t_S + \sqrt{(x_R - x_S)^2 + (y_R - y_0 - g)^2 + (z_R - z_0 - h)^2} / v, \quad (7)$$

其中 v 是该单元的平均声速, 即该单元各个网格节

$$g = y \frac{A^2 \{ (bvA + z_0 - z) [cvA^3 - (y_0 - y)(z_0 - z)] - 2(avA + y_0 - y) [A^2 - (z_0 - z)^2] \}}{4[A^2 - (y_0 - y)^2][A^2 - (z_0 - z)^2] - [cvA^3 - (y_0 - y)(z_0 - z)]^2}, \quad (8)$$

$$h = \frac{A^2 \{ (avA + y_0 - y) [cvA^3 - (y_0 - y)(z_0 - z)] - 2(bvA + z_0 - z) [A^2 - (y_0 - y)^2] \}}{4[A^2 - (y_0 - y)^2][A^2 - (z_0 - z)^2] - [cvA^3 - (y_0 - y)(z_0 - z)]^2}, \quad (9)$$

其中:

$$A = \sqrt{(x_R - x_S)^2 + (y_R - y_0)^2 + (z_R - z_0)^2},$$

$$a = (t_2 - t_1 + t_4 - t_3) / (2\Delta y),$$

$$b = (t_1 - t_3 + t_2 - t_4) / (2\Delta z),$$

$$c = [(t_2 - t_1) - (t_4 - t_3)] / (\Delta y \Delta z).$$

根据 (8) 式和 (9) 式分别求出 g 和 h 后, 即获得了 S 点在该界面上的位置, 并可由 (7) 式得到声波经过 S 点到达 R 点的传播时间。需要说明的是, 求出的 g 和 h 应满足约束条件: $-0.5\Delta y \leq g \leq 0.5\Delta y$, $-0.5\Delta z \leq h \leq 0.5\Delta z$, 否则, 结果不能用。

同理, 我们可在一个单元内分别求出声波经过其它各个界面到达接收点 R 的传播时间。在这些传播时间中选取最小值, 该最小值所对应的边界点 S 便是声线路径的通过点, 该点与接收点的连线即为该单元内的声线路径。在此基础上, 从声源到接收点的声线追踪步骤如下:

(1) 在接收点所在单元内, 利用该单元网格节点上计算出的波前传播时间, 按照上述方法确定到达接收点的声线与该单元界面的交点。如果接收点位于单元边界或网格节点上, 这时要同时考虑接收点所在的所有单元的界面。

(2) 以该交点为新的接收点, 重复步骤 (1), 依次确定声线与其穿过的各个单元界面的交点, 直至追踪到声源所在单元为止。

(3) 把声源和确定的所有交点及接收点顺次相连, 就得到了声源到该接收点的声线路径。

2 数值模拟实验

以下实验均在 CPU 主频为 1.6 GHz、操作系统为 Windows XP 的计算机环境下进行。

图 3 是计算波前传播时间的 FMM 和 GMM 两种算法的 CPU 运算时间的比较。采用 $400 \text{ m} \times 400 \text{ m} \times 400 \text{ m}$ 的三维均匀介质模型, 介质声速为 $v = 5000 \text{ m/s}$ 。对上述模型使用不同的网格距进行离散, 分别由 FMM 算法和 GMM 算法计算模型所有网格

点上声速的均值。为求解方便, 把上式中的开方项在 (y_0, z_0) 处用二元函数的泰勒级数展开, 并取至 g 和 h 二次项。根据 Fermat 原理, 令 $\partial t_R / \partial g = 0$, $\partial t_R / \partial h = 0$, 解得:

节点上的波前传播时间。在精度上两种算法相当, 但在计算效率上相差较大。图 3 所示的这两种算法的运算时间随网格节点数的变化曲线反映出, 随着模型离散节点数目的增多, GMM 算法的运算速度比 FMM 算法有了大幅度提高。

对上述三维均匀介质模型将 GMM 计算的波前传播时间与理论值进行了比较。该模型被离散成 $5 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$ 的单元, 声源位于 $(0,0,0)$ 。图 4 是 $y = 0 \text{ m}$ 的二维切片图, 虚线是理论波前传播时间的等时线, 实线是 GMM 计算的波前等时线, 两者非常一致, 说明 GMM 算法具有较高的精度。

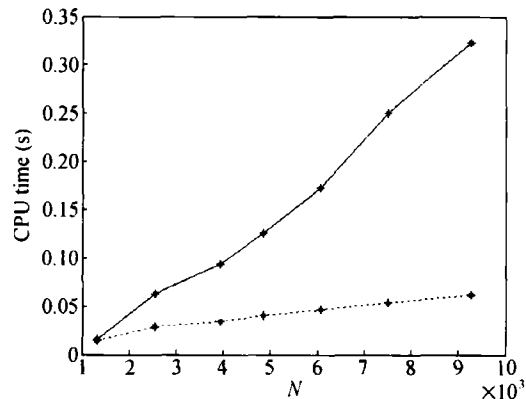


图 3 运算时间随离散网格节点数变化曲线。实线为 FMM 运算时间变化曲线, 虚线为 GMM 运算时间变化曲线。

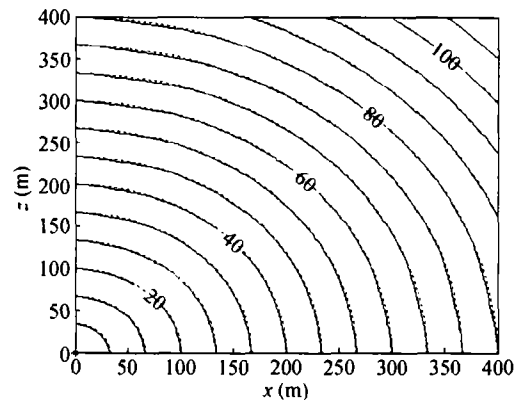
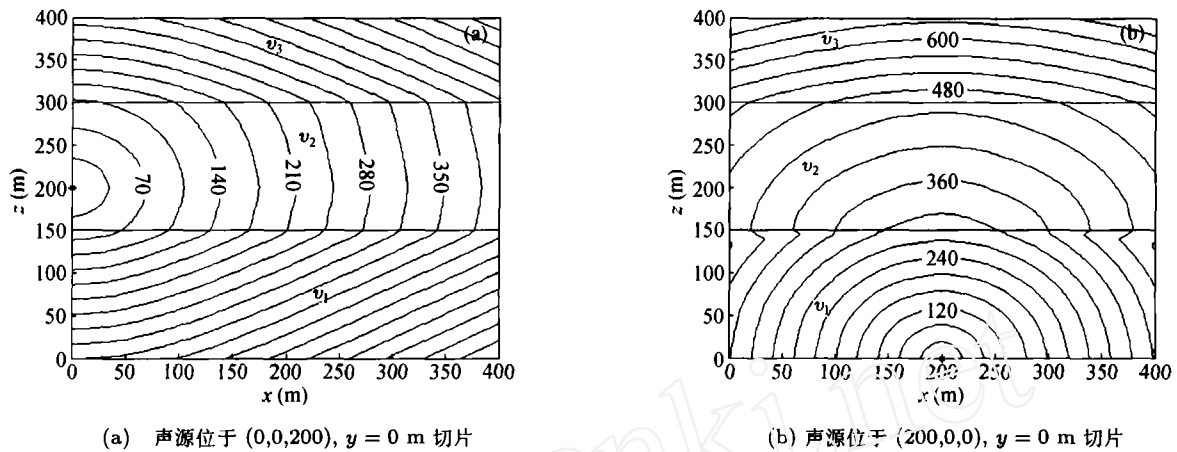


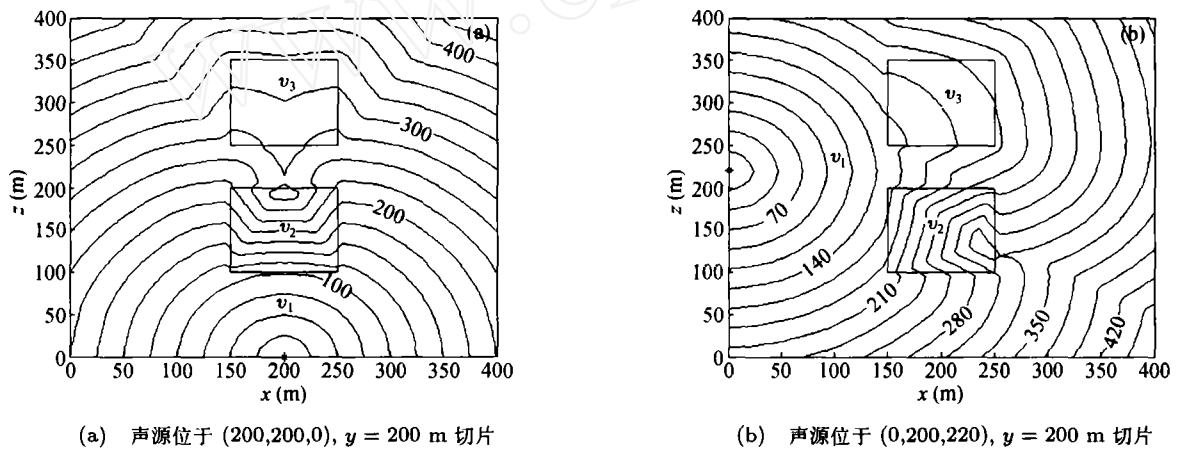
图 4 三维均匀介质模型波前等时线在 $y = 0 \text{ m}$ 处的切片。虚线表示理论等时线, 实线表示 GMM 计算结果。介质声速 $v = 5000 \text{ m/s}$, 星号为声源, 等时线上标注的是波前传播时间 (ms), 下同。



(a) 声源位于 (0,0,200), $y = 0$ m 切片

(b) 声源位于 (200,0,0), $y = 0$ m 切片

图 5 三维层状介质模型的波前等时线切片, 介质声速 $v_1 = 500$ m/s, $v_2 = 1000$ m/s, $v_3 = 500$ m/s.



(a) 声源位于 (200,200,0), $y = 200$ m 切片

(b) 声源位于 (0,200,220), $y = 200$ m 切片

图 6 含有高速和低速局部体的三维介质模型的波前等时线切片, 介质声速 $v_1 = 1000$ m/s, $v_2 = 500$ m/s, $v_3 = 2000$ m/s.

图 5 和图 6 是用 GMM 计算的三维非均匀介质模型的波前等时线二维切片, 等时线表示了波前传播规律。图 5 所示三维层状介质模型的中间层声速 1000 m/s 大于上、下层声速 500 m/s。图 6 所示声速为 1000 m/s 的背景介质中镶嵌一个相对高声速 2000 m/s 的局部物体和一个相对低声速 500 m/s 的局部物体。模型被离散成 $5 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$ 的单元, 用 GMM 算法计算了声源位于不同位置的波前传播时间。三维等时线切片图反映了波前在高速体内向外扩展快(等时线疏), 在低速体内向外扩展慢(等时线密)的传播规律。

对于图 4、图 5 和图 6 所对应的三种速度模型(依次记作模型 1、模型 2 和模型 3), 下面分别采用常用的地震波最短路径射线追踪法^[13]和本文算法计算声线路径。

表 1 是上述三种速度模型中, 计算声线路径的最短路径射线追踪法和本文算法两者间运算时间的比较。各模型中声源及接收点的位置分别如图 7、图 8 和图 9 所示(星号代表声源, 三角号代表接收点)。分别由最短路径射线追踪法和本文算法计算声源到各个接收点的声线路径, 并记录下它们的运行

时间。由表中数据明显可见, 本文算法大大提高了声线追踪的效率。

表 1 最短路径射线追踪法和本文算法运算时间的比较

模型编号	最短路径射线追踪运算时间 CPU(s)	本文算法运算时间 CPU(s)	效率提高的百分比 (%)
1	4.906	0.985	79.92
2	4.245	0.813	80.85
3	5.297	1.132	78.63

图 7 是模型 1 中分别由最短路径射线追踪法和本文算法所获得的声线路径。模型被离散成 $10 \text{ m} \times 10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ 的单元。在均匀介质中, 理论声线路径应为从声源到接收点的直线段。图 7(a) 表示用最短路径射线追踪法得到的声线路径, 该方法把满足最小传播时间的网格节点直接相连, 这样得到的声线路径在很多情况下呈折线状。特别随着离散网格距的逐渐变大, 该方法在匀速介质中确定的声线的折线状会愈加明显, 与实际路径相差较大。图 7(b) 表示利用本文算法得到的声线路径, 它们与理论路径基本一致。

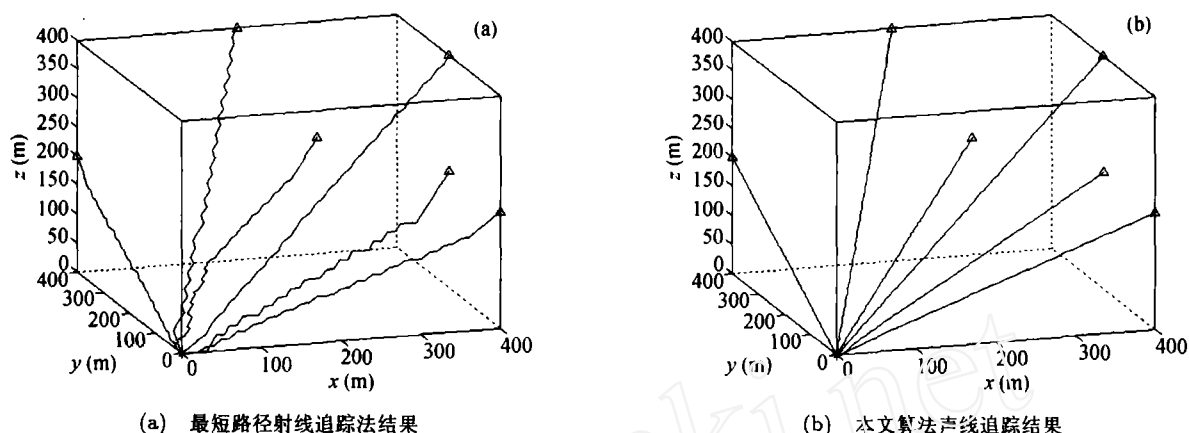


图 7 用不同方法计算的图 4 均匀介质模型声线路径。介质声速 $v = 5000 \text{ m/s}$ 。星号代表声源，三角号代表接收点（下同）。

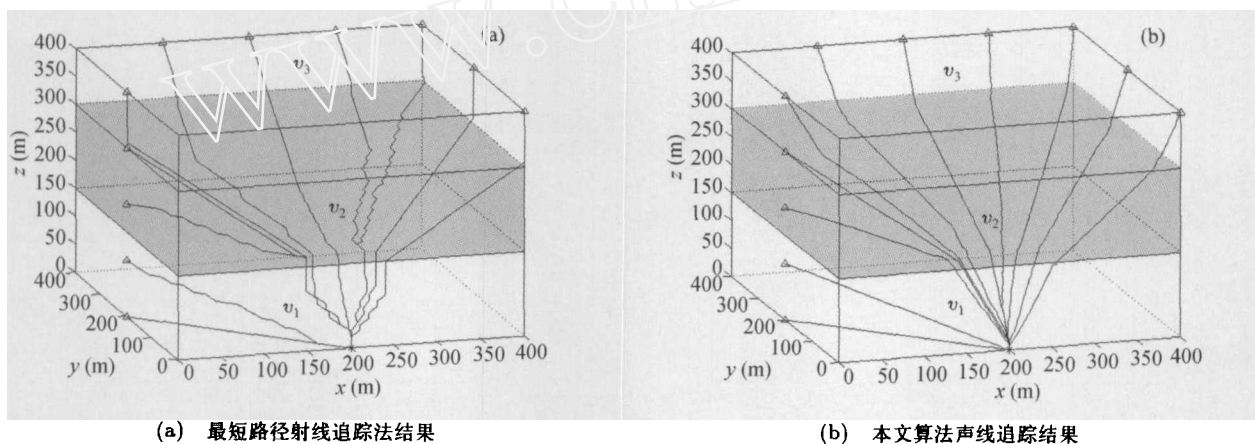


图 8 用不同方法计算的图 5 层状介质模型的声线路径。介质声速 $v_1 = 500 \text{ m/s}$, $v_2 = 1000 \text{ m/s}$, $v_3 = 500 \text{ m/s}$ 。

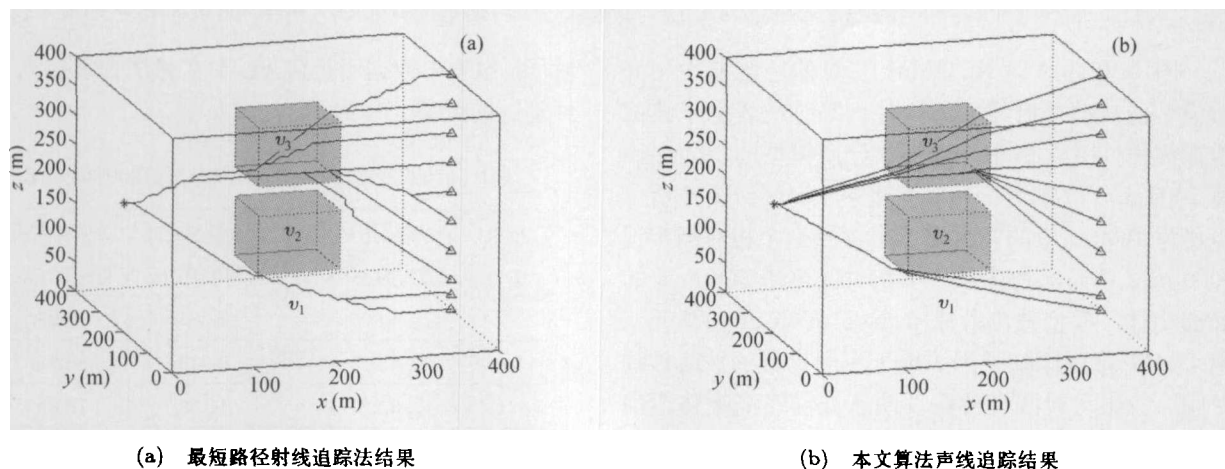


图 9 用不同方法计算的图 6 含高速和低速局部体介质模型的声线路径。介质声速 $v_1 = 1000 \text{ m/s}$, $v_2 = 500 \text{ m/s}$, $v_3 = 2000 \text{ m/s}$ 。

图 8 和图 9 所示为模型 2 和模型 3 中分别由两种不同算法获得的声线路径。模型 2 和模型 3 均被离散成 $10 \text{ m} \times 10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ 的单元。由 (a)、(b) 图形的对比可以看出，最短路径射线追踪法计算的声线路径在均匀介质内不光滑，本文算法获取的声线路径明显优于最短路径算法获得的声线路径，较好地显示出声波从高速层到低速层、从低速层到高速层发生透射、折射等特征，以及高速体“吸引”射线和低速体“排斥”射线的特征。

3 结论

本文研究了把三维复杂非均匀介质声线追踪问题，分成正向计算波前传播时间和反向确定声线路径的二个不同的数学问题来解决的具体方法。在正向计算波前传播时间的方法中基于水平集的方法具有较高的精度和很强的适应性，其中 FMM 和 GMM 的精度相当，而 GMM 的运算效率远高于 FMM。

在反向确定声线路径时, 我们基于离散网格节点上的波前传播时间和单元内波前传播时间的双线性插值近似, 根据 Fermat 原理提出了确定三维介质声线路径的算法。与常用的最短路径射线追踪方法及其它跟踪具有波前传播时间最大梯度值的方法不同, 所求出的声线路径, 不是离散模型相关网格节点连成的折线, 而是穿过单元边界面上正好满足最小传播时间条件的那些点的连线, 极大地提高了声线路径的精度。

与直接计算声线路径的算法相比, 先计算波前传播时间, 再根据波前传播时间确定声线路径的方法具有许多优点。例如, 能够考虑到波的透射、折射、绕射等现象; 不论介质多复杂, 都可以确定出任意声源和接收点位置的声线路径, 不存在声线盲区; 求解过程稳定。本文结合了高效的 GMM 和提出的确定三维介质声线路径的方法, 使该类三维方法的精度和计算速度得到了很大的提高。

参 考 文 献

- 1 高尔根, 徐果明, 李光品, 屠世杰, 赵 谊. 任意界面下的整体迭代射线追踪方法研究. 声学学报, 2002; 27(3): 282—287
- 2 南明星, 杨廷武, 丁风雷. 海洋锋区的三维声线轨迹分析. 声学技术, 2003; 22(4): 279—281
- 3 姜 薇, 李太宝. 三维声线追踪的正三棱锥前向伸展算法. 声学学报, 2005; 30(5): 404—408
- 4 张建中, 丁兴号. 一种 2.5 维井间透射波层析成像方法. 声学学报, 2007; 32(1): 91—96
- 5 应金品, 包正康. 三维声波方程逆问题的共轭梯度法求解. 声学学报, 1998; 23(4): 340—348
- 6 Vidale J. Finite-difference calculation of traveltimes in three dimensions. *Geophysics*, 1990; 55(5): 521—526
- 7 Rawlinson N, Sæmbridge M. Wave front evolution in strongly heterogeneous layered media using fast marching method. *Geophys. J. Int.*, 2004; 156: 631—647
- 8 Sethian J A. 3-D travelttime computation using the fast marching method. *Geophysics*, 1999; 64(2): 516—523
- 9 Sethian J A. Evolution, implementation, and application of level set and fast marching methods for advancing fronts. *Computational Physics*, 2001; 169: 503—555
- 10 Franklin J B. A high-order fast marching scheme for the linearized Eikonal equation. *Journal of Computational Acoustics*, 2001; 9(3): 1095—1109
- 11 Kim S. 3-D eikonal solvers: First-arrival traveltimes. *Geophysics*, 2002; 67(4): 1225—1231
- 12 张建中, 陈世军, 徐初伟. 动态网络最短路径射线追踪. 地球物理学报, 2004; 47(5): 899—904
- 13 张建中, 陈世军, 余大祥. 最短路径射线追踪方法及其改进. 地球物理学进展, 2003; 18(1): 146—150