

学校编码: 10384

分类号_____密级_____

学号: 19020101152531

UDC_____

廈門大學

硕士学位论文

旋子模型与Kauffman多项式

Spin Model and The Kauffman Polynomial

原曦曦

指导教师姓名: 金贤安教授

专业名称: 应用数学

论文提交日期: 2013年4月

论文答辩时间: 2013年6月

学位授予日期: 年 月

答辩委员会主席: _____

评阅人: _____

2013年4月

厦门大学博硕士学位论文摘要库

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果,均在文中以适当方式明确标明,并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范(试行)》。

另外,该学位论文为()课题(组)的研究成果,获得()课题(组)经费或实验室的资助,在()实验室完成。(请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称,未有此项声明内容的,可以不作特别声明。)

声明人(签名):

年 月 日

厦门大学博硕士学位论文摘要库

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（ ） 1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，
于 年 月 日解密，解密后适用上述授权。

（ ） 2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年 月 日

厦门大学博硕士学位论文摘要库

摘要

François Jaeger(1947-1997)是法国著名的组合学家，是链环不变量、结合方案与统计物理模型领域的主要研究者。L.H.Kauffman在文章Combinatorics and topology François Jaeger's work in knot theory中回顾了François Jaeger有关Homfly多项式的组合模型方面的工作。本文主要以F. Jaeger的文章Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial为基础介绍了François Jaeger在Kauffman多项式的旋子模型方面的工作。从一般旋子模型入手，先要求旋子模型的权重函数满足一些条件，使得其配分函数是链环不变量。利用一般矩阵乘积和Hadamard乘积，可以将权重函数满足的条件用矩阵的形式表示。同时，权重矩阵在两种乘积运算下生成了两个代数，这两个代数是同构的。如果这两个代数结合起来是某一结合方案的Bose-Mesner代数，那么同构说明了这个结合方案是形式上自对偶的。在此基础上，我们进一步要求旋子模型再满足一个方程，使得其配分函数满足Kauffman多项式的性质，而这个方程却使得形式上自对偶结合方案的Bose-Mesner代数至多是3维的。最后，以一些局部强正则图所决定的形式上自对偶结合方案为例，详细地写出Kauffman多项式的旋子模型。本文的目的是理清文章的思路以便阅读，补充一些定理的证明，并指其中存在的一个未解决的问题。

关键词： Kauffman多项式 旋子模型 结合方案 Bose-Mesner代数 强正则图

厦门大学博硕士学位论文摘要库

Abstract

François Jaeger(1947-1997)was a famous French combinatorics scientist and made an important contribution to the fields of link invariants,association schemes and statistical physics models.Louis H Kauffman reviewed the work about combinatorics models of the Homfly polynomial written by François Jaeger in the Combinatorics and topology François Jaeger's work in knot theory.In this paper,we review the work about spin models for the Kauffman polynomial based on the paper of the Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial.First,spin models which define link invariants can be characterized by a few equations satisfied by the weight functions.The equations can be easily written in matrix form,using the usual matrix product and the Hadamard product.There are two algebras generated by the weight matrices under the two products and they are isomorphic.The isomorphism acts as a formal duality when both algebras coincide with the Bose-Mesner algebra of some association scheme.Moreover,the Kauffman polynomial will be obtained,provided a single additional equation is satisfied.The additional equation constraint that the Bose-Mesner algebra has dimension at most 3.Finally,we exhibit some spin models for the Kauffman polynomial in detail by using formally self-dual,locally strongly regular graphs.The purpose of this paper is to clarify the paper and to supplement the proof.In addition,we point out a bug in it.

Key Words: Kauffman polynomial; spin model; association scheme; Bose-Mesner algebra; strongly regular graph

厦门大学博硕士学位论文摘要库

目 录

摘要	I
Abstract	III
第一章 引言	1
第二章 预备知识	3
2.1 Kauffman多项式	3
2.2 旋子模型	6
2.3 结合方案及其Bose-Mesner代数	9
2.3.1 代数.....	9
2.3.2 结合方案.....	10
2.3.3 Bose-Mesner代数	11
2.3.4 形式上自对偶的结合方案	11
第三章 链环不变量、结合方案与旋子模型的联系	13
3.1 作为正则同痕不变量的旋子模型.....	13
3.2 结合方案与旋子模型	17
第四章 Kauffman多项式的旋子模型.....	22
4.1 作为Kauffman多项式的旋子模型应满足的条件	22
4.2 \mathcal{M} 是2维即完全图的情形.....	24
4.3 \mathcal{M} 是3维即强正则图的情形	25
4.3.1 四边形图.....	26
4.3.2 五边形图.....	28
4.3.3 格子图	30
4.3.4 Higman-Sims图	31
第五章 进一步工作及本文未解决的问题.....	32
5.1 进一步工作.....	32
5.2 本文未解决的问题.....	32
参考文献	34

CONTENTS

Abstract (in Chinese)	I
Abstract (in English)	III
Chapter 1 Preface	1
Chapter 2 Basic preparations	2
2.1 Link	2
2.2 Spin model	5
2.3 Association scheme and Bose-Mesner Algebra	8
2.3.1 Algebra	8
2.3.2 Association scheme	9
2.3.3 Bose-Mesner Algebra	10
2.3.4 Formally Self-dual Association scheme	10
Chapter 3 Connection among the Link invariant, Association scheme and spin model	12
3.1 Regular isotopy invariants associated to spin model	12
3.2 Association scheme and spin model	17
Chapter 4 Spin model for the Kauffman polynomial	22
4.1 Equations satisfied for the Kauffman polynomial	22
4.2 \mathcal{M} is 2-dimensional	24
4.3 \mathcal{M} is 3-dimensional and Strongly regular graph	25
4.3.1 The square	26
4.3.2 The pentagon	28
4.3.3 The lattice graphs	30
4.3.4 The Higman-Sims graph	31
Chapter 5 Further research and unsolved problems	32
5.1 Further research	32

5.2 unsolved problems	32
References	34
Acknowledgements	37

厦门大学博硕士学位论文摘要库

厦门大学博硕士学位论文摘要库

第一章 引言

链环多项式不变量的发现引起了数学家和统计物理学家的广泛关注。最初是在研究Potts和ice-type模型的Temperley-Lieb代数时，利用辫理论和Temperley-Lieb代数的性质可以定义出一个链环不变量[13, 18]，从此这两个学科之间建立了联系。Kauffman是第一位从直观的角度理解这两者之间的关系，建立了尖括号多项式的状态模型。随着研究的不断深入，数学家们发现统计物理学中，某些vertex模型的配分函数可以定义出一些新的链环不变量。从组合上来说，这些统计物理模型为2维递归定义的链环不变量提供了应用的背景。

通过vertex模型的配分函数，虽然能定义出一些链环不变量，但是无法对这些不变量的组合性质给出一个简单的说明。我们知道，Kauffman多项式是利用组合的方式定义在链环投影图上的，而链环投影图可以通过符号图来表示。也就是说，一个链环的Kauffman多项式只取决于其对应符号图的抽象结构[21]。vertex模型是没有这样的性质，自然就想，是否存在其他的统计物理模型，通过图的抽象结构来定义，使得模型的配分函数正是Kauffman多项式，或者说至少是一些特殊取值下的Kauffman多项式。旋子(spin)模型正是满足这样的条件。

本论文讨论的是以旋子模型的方式来定义Kauffman多项式。一般旋子模型的配分函数不一定是链环不变量。如果要求旋子模型的配分函数是链环不变量，那么它的权重函数需要满足一些方程[13]。如果进一步要求链环不变量是Kauffman多项式，那么它还需要满足一个限制方程。通过一般矩阵的乘积运算和Hadamard乘积运算，可以将以上这些方程写成矩阵形式，对每个满足方程的旋子模型联系两个代数，这两个代数分别满足两种乘积运算并且同构。我们感兴趣的是当这两个代数结合起来是某一结合方案的Bose-Mesner代数的情况，这两个代数同构则说明了这个结合方案是形式上自对偶的[7]。由Kauffman多项式决定的限制方程则要求Bose-Mesner代数至多是3维的。换句话说，形式上自对偶的强正则图是我们研究Kauffman多项式的旋子模型的重要内容。

我们首先在第二章介绍本文中用到的几个基本概念。第三章说明链环不变量、结合方案分别与旋子模型的关系，从形式上自对偶的结合方案出发，构造出旋子模型的权重函数，并找出以这种方式定义的权重函数，满足配分函数是链环不变量所需的条件。第四章详细说明了，在第三章的基础上建立的旋子模型，其配分函数是Kauffman多项式需要满足的限制方程，并分别考虑Bose-Mesner代数是2维和3维的情况。第五章将说明进一步可以研究的内容以及本论文中未能解决的问题。

本论文是以文献[1]为基础来完成的，这篇文献是法国著名的组合学家François Jaeger在逝世前的重要工作，文章的难度大，跨度广。本论文的目的是理清文中的思路，弥补一些证明的缺失，便于阅读。作者在本文的贡献是，补充定理1和定理3的证明，指出文献[1]出现的一个问题，并详细地写出了一些特殊取值的Kauffman多项式的旋子模型。

厦门大学博硕士论文摘要库

Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士学位论文摘要库