

BCK-代数的理想的两点注记*

林亚南
(数学系)

摘 要

本文说明了BCK-代数的两个理想生成的理想.生成的子代数和这两个理想之并的包含关系,指出黄骏敏同志的一篇文章中的几个不妥之处,并解答了该文提出的一个问题.

关键词: BCK-代数的理想, 由两个理想生成的子代数, 由两个理想生成的理想.

设 $(X; *)$ 是一个BCK-代数, X 的非空子集 A 称为 X 的理想, 如果它满足, 1) $0 \in A$; 2) 若 $x \in A, y * x \in A$, 则 $y \in A$.

设 A, B 是BCK-代数 X 的理想, $\{A, B\}$ 表示 X 的包含 $A \cup B$ 的最小子代数, 称为由 A, B 生成的子代数. (A, B) 表示 X 的包含 $A \cup B$ 的最小理想, 称为由 A, B 生成的理想.

(一)

命题 X 为BCK-代数, A, B 是 X 的理想, 则

(1) $A \cup B = \{A, B\} \subseteq (A, B)$,

(2) (A, B) 可以真包含 $\{A, B\}$.

证 (1) 由于 $A \subseteq \{A, B\}, B \subseteq \{A, B\}$, 所以 $A \cup B \subseteq \{A, B\}$. 另一方面, 对任意的 $x, y \in A \cup B$, 不妨设 $x \in A$. 若 $y \in A$, 显然有 $x * y, y * x \in A \subseteq A \cup B$; 若 $y \in B$, 据文[1]性质 1.2 有 $x * y \in A, y * x \in B$, 所以 $x * y, y * x \in A \cup B$, 故 $A \cup B$ 是 X 的子代数. 所以 $\{A, B\} \subseteq A \cup B$, 故 $A \cup B = \{A, B\}$. 又 $A \cup B \subseteq (A, B)$ 是显然的.

(2) (A, B) 可以真包含 $\{A, B\}$ 见下例:

例1 $X = \{0, 1, 2, 3\}$, 运算表为(表1)

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	2	2	0	0
3	3	2	1	0

表 1

容易验证 $(X, *)$ 是一个 BCK-代数. 令 $A = \{0, 1\}, B = \{0, 2\}$, 易见 A 和 B 都是 X 的理想. $A \cup B = \{0, 1, 2\}$, 但 $(A, B) = X$, 所以 $\{A, B\} \subsetneq (A, B)$. 证毕.

由此可见, 文[1]推论 1.2 中在与上述命题同样条件下得出结论 " $(A, B) = \{A, B\} = A \cup B$ ", 这是不正确的. [1] 的论证中用了如下推断: 由 " $(A, B)/B = A, B/B$ " 得出 " $(A, B) = \{A, B\}$ ". 实际上, 这个推断是错误的. 如在例 1 中, $(A, B)/B = \{A, B\}/B = \{B_0, B_1\}$, 但 $(A, B) \neq \{A, B\}$.

[1] 中推论 1.3 是推论 1.2 的推广, 因而它也是不正确的.

* 本文于 1986 年 11 月 1 日收到.

[1]中引理5.3:“BCK-代数 X 中全体局部超幂零理想所生成的理想 L 是一个局部超幂零理想”。[1]在证明此引理中应用了推论1.3,这显然是不妥的。但此引理是正确的,它的证明只要作如下的修改。

证 令 $L_i, i \in I$ 是 X 的全体局部超幂零理想,于是 $L = (\bigcup_{i \in I} L_i)$,在 L 中取一个有限集 $H = \{x_1, \dots, x_n\}$,于是每个 x_i 仅包含在有限个 L_i 所生成的理想内,因此 H 包含在有限多个局部超幂零理想所生成的理想内,由推论5.1知 H 应生成一个超幂零子代数。因此, L 是局部超幂零的。证毕。

[1]在证明性质4.1中利用了推论1.2。所以,性质4.1乃至 G -正则性的根性是否成立,是一个问题。

(二)

[1]中提出问题: I 是BCK-代数的子代数,且有 $a * x \in I, \forall a \in I, x \in X$,那末, I 是否是 X 的理想?

我们对这个问题的回答是否定的。例如

例2 $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 运算表为(表2)

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
2	2	1	0	1	0
3	3	1	1	0	0
4	4	2	1	2	0

表2

容易验证, $(X, *)$ 是一个BCK-代数。令 $I = \{0, 1, 2, 3\}$, 易见 I 是 X 的子代数。易证 $\forall a \in I, x \in X$, 均有 $a * x \in I$, 但 I 不是 X 的理想。事实上, $4 * 1 = 2 \in I, 1 \in I$, 但 $4 \notin I$ 。

此例亦说明[1]中推论1.1“ X 是BCK-代数, B 是 X 的理想, A 是 X 的子代数,则 $A \cap B$ 是 X 的理想”是不成立的。

参 考 文 献

- [1] 黄骏敏, 关于BCK-代数的根理论(I), 南京大学学报数学半年刊, 2, 1(1985).
 [2] 陈昭木, 双B-代数讲义, 福建师大数学系, 1985, 1.
 [3] 姜豪, 关于有限BCK-代数的若干结果, 第二次双B-代数学术会议交流材料, 1984, 12.

A Remark on Ideals of BCK-algebras

Lin Ya-nan

(Department of Mathematics)

Abstract

In this note, we discuss the inclusion relations among ideal and subalgebra generated by two ideals and the union of these two ideals. At the same time, we also show some errors in [1].

Key words: Ideals of BCK-algebras, Subalgebra generated by two ideals, Ideal generated by two ideals.