研究简报

倾斜模唯一性的有效判定*

彭联刚　林亚南

（北京师范大学数学系，北京 100875）

关键词　倾斜模、顶、底座、代数的通常箭图

本文总假设 k 为代数闭域，A 为 k 上基的（basic）连通的（connect）有限维代数（结合的，带单位元）。代数 A 上的模总指有限生成左 A-模。在同构的意义下，记 $\{P_A(a)|a\in I\}$ 表示所有不可分解投射模的集合，$\{E_A(a)|a\in I\}$ 表示所有不可分解入射模的集合，$\{S_A(a)|a\in I\}$ 表示所有单模的集合，这里 I 是固定的有限集合，$P(a)/\mathrm{rad}\,P(a)=S(a)=\mathrm{soc}\,E(a)$。在不引起混淆的情况下，我们可以省略下标 A。另外，对于 $J\subseteq I$，我们记

$$P(J)=\bigoplus_{b\in J}P(b).$$

在本文中，态射的合成总是从左到右。

一个 A-模 T 称为倾斜模，如果下面条件被满足：

(1) $\mathrm{proj.\ dim}_A T\leqslant 1$;

(2) $\mathrm{Ext}^1_A(T,T)=0$;

(3) 存在正合序列 $0\to A\to T'\to T''\to 0$，其中 T', T'' 是 T 的直和项的直和。

我们知道，A 本身是倾斜模。什么时候仅存在这样唯一的倾斜模呢？一个自入射代数显然仅有唯一倾斜模。Assem 给出一个非自入射代数但具有唯一倾斜模的例子（见文献 [1]，III. 2.14）。Happel 给出了代数仅有唯一倾斜模的充要条件（见文献 [1]，III. 2.14）。现在，对这个问题，我们得到一个有效判定。

定理　设 A 是一个代数，则下面条件等价：

(1) A 仅有唯一的倾斜模；

(2) 对任意非投射 A-模 M，有 $\mathrm{proj.\ dim}_A M=\infty$;

(3) 每个单模 $S(a)$ 都是某个不可分解入射模 $E(b)$ 的直和项。

证　(1)$\Leftrightarrow$(2) 见文献 [1]，III. 2.14。

(2)$\Rightarrow$(3)：否则，假设对任意入射模 $E(b)$，单模 $S(a)$ 不是 $\mathrm{top}\,E(b)$ 的直和项，那么对任意 $b\in I$，$\mathrm{Hom}_A(E(b),S(a))=0$。由文献 [2] 引理 2.2 知 $\mathrm{proj.\ dim}_A\tau^- S(a)\leqslant 1$。$\tau^- S(a)$ 显然不是投射模。矛盾。

(3)$\Rightarrow$(1)：否则，假设存在一个倾斜模 T，含非投射不可分解直和项 T_1，则 $\mathrm{proj.\ dim}_A T_1\leqslant 1$。由文献 [2] 引理 2.2，我们得到对任意 $b\in I$，$\mathrm{Hom}_A(E(b),\tau T_1)=0$。因为

本文 1990 年 12 月 4 日收到。1991 年 6 月 19 日收到修改稿。

* 国家自然科学基金和国家青年自然科学基金资助项目。

$\tau T_1 \neq 0$，我们可以设 $S(a)$ 是 $\mathrm{soc}\,\tau T_1$ 的一个直和项，即 $S(a)$ 是 τT_1 的一个单子模．根据题设，存在某个不可分解入射模 $E(c)$ 使得 $S(a)$ 是 $\mathrm{top}\,E(c)$ 的直和项，即 $\mathrm{Hom}_A(E(c), S(a)) \neq 0$，从而 $\mathrm{Hom}_A(E(c), \tau T_1) \neq 0$，矛盾．证毕．

因为局部代数只有一个单模，我们显然有下面的

推论 1 局部代数仅有唯一倾斜模．

推论 2 设 A 是自入射代数，则

(1) $B = A/\mathrm{soc}\,P(I')$ 上的倾斜模只可能为 $\left(\sum\limits_{b\in I}\oplus P_A(b)\right)\oplus\left(\sum\limits_{b\notin I}\oplus\tau_B^- S_A(b)\right)$，这里 $I'\subseteq I$，$I''=I\backslash I'$，$I''\subseteq J\subseteq I$；

(2) 在 A 的通常箭图顶点 a 处有圈 (loop) 当且仅当 $B=A/\mathrm{soc}\,P(a)$ 只有唯一倾斜模．

证 容易看到 $\mathrm{soc}\,P(I')$ 是 A 的理想，且 A-模 $\left(\sum\limits_{b\in I}\oplus P_A(b)\right)\oplus\left(\sum\limits_{b\notin I}\oplus\tau_B^- S_A(b)\right)$ 是 B-模．如果 $b\notin I'$，$P_A(b)$ 是投射入射 B-模；如果 $b\in I'$，$E_B(b)=\mathrm{rad}\,P_A(b)$．

(1) 由文献 [2] 推论 2.1，$\bigoplus\limits_{b\notin I'} P(b)$ 必是倾斜 B-模的直和项．我们只要证明：若 M 是倾斜 B-模的非投射的不可分解直和项，则存在 $c\in I'$，使得 $M=\tau_B^- S_A(c)$．设 M 是某个倾斜 B-模的直和项，那么 $\mathrm{proj.\ dim}_B M\leqslant 1$．所以对于任意 $b\in I$，$\mathrm{Hom}_B(E_B(b), \tau_B M)=0$．当 $b\notin I'$ 时，$E_B(b)=P_B(b)$，所以 $\tau_B M$ 的支撑只能是 $\{P_B(b)\}_{b\in I'}$ 的子集，因而存在 B-模满同态

$$\sum_{b\in I'}\oplus P_B^{m_b}(b)\to\tau_B M,$$

这里 m_b 是非负整数，它导出 A-模满同态 $\sum\limits_{b\in I'}\oplus P_A^{m_b}(b)\to\tau_b M$．

另一方面，当 $b\in I'$ 时，$E_B(b)=\mathrm{rad}\ P_A(b)$，即对于任意 $b\in I'$，$\mathrm{Hom}_A\,(\mathrm{rad}\,P_A(b), \tau_B M)=0$，所以有满同态 $\sum\limits_{b\in I'}\oplus(P_A^{m_b}(b)/\mathrm{rad}P_A^{m_b}(b))\to\tau_B M$，

因为 $\tau_B M$ 不可分解，所以存在 $a\in I'$，使得 $\tau_B M=S_A(a)$，即 $M=\tau_B^- S_A(a)$．

(2) 设在 A 的通常箭图的某顶点 a 处存在圈，我们将证明 B 仅有唯一倾斜模．由 (1)，我们只要证明如果 $\tau_B^- S(a)\neq 0$，则 $\mathrm{proj.\ dim}_B\tau_B^- S(a)>1$．根据代数的通常箭图的构造，我们知道存在 $0\neq f\in\mathrm{Hom}_A(P_A(a), P_A(a))$，满足 (a) f 既不可裂满也不可裂单；(b) 如果 f 可经过投射分解 $f=gh$，这里 P 是投射模，$g\in\mathrm{Hom}_A(P(a), P)$，$h\in\mathrm{Hom}_A(P, P(a))$，则或 g 可裂单或 h 可裂满．显然 $\mathrm{Im}\,f\subseteq\mathrm{rad}\,P(a)$．设 j: $P\to\mathrm{rad}\,P_A(a)$ 是 $\mathrm{rad}\,P_A(a)$ 的投射盖，那么存在 $l\in\mathrm{Hom}_A(P(a), P)$，使得 $f=lj$．我们断言 j 非可裂满．否则 $\mathrm{rad}\,P(a)$ 为投射模，从下面交换图

$$\begin{tikzcd}
P_A(a) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & P_A(a) \\
& \mathrm{rad}\,P_A(a) \arrow[ur, hook, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

这里 i 为标准嵌入，从条件 (a)，(b) 知 $P_A(a)=\mathrm{rad}\,P_A(a)$，矛盾．所以 l 为可裂单，即 $P(a)$ 为 P 的直和项．由于 $\mathrm{rad}\,P(a)$ 与 $\mathrm{top}(\mathrm{rad}\,P(a))$ 的投射盖相同，从而 $S(a)$ 是 $\mathrm{top}(\mathrm{rad}\,P(a))$ 的直和项，故 $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{rad}\,P(a), S(a))\neq 0$，即 $\mathrm{Hom}_B(E_B(a), S(a))\neq 0$．由文献 [2] 引理 2.2，我们有 $\mathrm{proj.\ dim}_B\tau_B^- S(a)>1$．

反过来，假设 B 只有唯一倾斜模．如果 $\tau_B^- S(a)\neq 0$，由 (1) 知 $\mathrm{proj.\ dim}_B\tau_B^- S(a)>1$．

从而存在某个 $b\in I$，使得 $\mathrm{Hom}_B(E_B(b), S(a))\neq 0$。当 $b\notin I'$ 时，$P_B(b)=E_B(b)=P_A(b)$，所以只可能是 $\mathrm{Hom}_B(E_B(a), S(a))\neq 0$，即 $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{rad}P_A(a), S(a))\neq 0$。设 $0\neq f\in\mathrm{Hom}_A(\mathrm{rad}\,P_A(a), S(a))$，则 f 必满射。设 j: $P(a)\to S(a)$ 是投射盖，那么存在 $g\in\mathrm{Hom}_A(P(a), \mathrm{rad}P(a))$ 使得 $j=gf$。设 i 是标准嵌入 i: $\mathrm{rad}P(a)\to P(a)$，显然 gi 既非可裂单也非可裂满。如果 gi 可通过投射模分解 $gi=st$，这里 P 为投射模，$s\in\mathrm{Hom}_A(P(a), P)$，$t\in\mathrm{Hom}_A(P, P(a))$。假设 t 非可裂满，我们断言 s 必可裂单。事实上，因 t 非可裂满，我们有 $\mathrm{Im}t\subseteq\mathrm{rad}P(a)$，所以 t 诱导 $t'\in\mathrm{Hom}_A(P, \mathrm{rad}\,P(a))$ 使得 $t'i=t$，$g=st'$。这样，从 $j=st'f$ 可知 $t'f\neq 0$。我们可以提升 $t'f$ 到 $h\in\mathrm{Hom}_A(P, P_A(a))$，使得 $hj=t'f$，故 $j=st'f=shj$。如果 sh 非满同态，那么 $\mathrm{Im}sh\subseteq\mathrm{rad}\,P(a)$，这意味着 $(P_A(a))shj=0$，故 $j=shj=0$，矛盾。所以 sh 为满射，因而是同构。这样 s 可裂单。我们已经证明了 gi 是相对不可约映射，即 A 的通常箭图在顶点 a 处存在圈。证毕。

我们知道，当 A 的通常箭图存在 sink 时，A 的倾斜模不唯一。这种情况至少有 A 与一个 APR-倾斜模。一般的，此结论的逆命题不成立。例如，我们取 $A=k\vec{Q}/I$，其中

$$\vec{Q}:\ 2\ \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}}\ 1\ \xleftarrow{\gamma}\ 3,\quad I=\langle\gamma\beta, \alpha\beta\rangle,$$

易见 $S(2)$ 不是任意入射模的 top 的直和项。从我们的定理知，A 的倾斜模不唯一。

但是我们有

推论 3 设 A 为根方为零的代数，则 A 仅有唯一倾斜模当且仅当 A 的通常箭图不存在 sink。

证 假设在 A 的通常箭图中不存在 sink。那么，对于任意单模 $S(a)$，存在箭向 $a\to b$，因为 $\mathrm{rad}^2 A=0$，容易看到 $S(a)$ 是 top $E(b)$的直和项。所以定理保证 A 仅有唯一倾斜模。另一方面是显然的。证毕。

注 1 I. Assem 给出的非自入射但仅有唯一倾斜模的代数(见文献 [1]，III. 2.14) 如下：$A=k\vec{Q}/I$，这里

$\vec{Q}$:


I 为所有长度为 2 的路生成的理想。由推论 3 知 A 只有唯一倾斜模。

注 2 对偶于倾斜模，有余倾斜模的概念(见文献 [3]，4.1)。在本文的定理与推论中，把投射与入射，顶与底座，sink 与 source 的概念互换，容易得到相应的余倾斜模唯一性的有效判定和相应的推论。另由推论 3 知，A 仅有唯一倾斜模并不等价于 A 仅有唯一余倾斜模。

致谢：作者感谢导师刘绍学教授的指导，感谢肖杰博士的有益建议。

参 考 文 献

[1] Happel, D., Triangulated categories in representation theory of finite dimensional algebras, *London Math. Soc. LNS*, 119(1988), 1—206.

[2] Bongartz, K., Tilted algebras, *Springer LNM*, 903(19881), 26—38.

[3] Ringel, C. M., Tame algebras and integral quadratic frms, *Springer LNM*, 1099(1984), 1—376.