福建师范大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF FUJIAN TEACHERS UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE)
5(4):29-32
1989

半 环 的 J-根*

林 亚 南
(数学系)

摘 要

本文对半环引进 J-根的概念，给出了其半模的刻划，证明了它是一个根性. 同时讨论了由 $J(\wedge)$ 导出的环 $K(J(\wedge))$ 与由半环 $\wedge$ 导出的环 $K(\wedge)$ 的 Jacobson 根 $J(K(\wedge))$ 的关系.

关键词：半环，半环上的半模，半环的J-根

为叙述方便，我们先重述一些定义[1].

一个半模指的是可换幺半群. 一个半环 $(\wedge,+,\cdot)$ 指的是：$(\wedge,+)$ 是半模，$(\wedge,\cdot)$ 是半群，且满足：$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$，$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$，$0\cdot a=a\cdot 0=0$. 我们记 $a\cdot b=ab$.

设 $\wedge$ 是一个半环，$\wedge$ 上左半模 M（记为 $\wedge$-半模 M）指的是：M 是一个半模，且存在数乘运算 $\wedge\times M\to M$ 满足：$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b,(\lambda+u)a=\lambda a+ua,\lambda 0=0a=0(\lambda,u\in\wedge,a,b\in M)$. 相应也有半环上右半模的概念.

幺半环，幺半环上的半模，子半环，子半模，半环的理想等概念是自然的. 设 $\wedge$、Γ 是半环，半环同态 f：$\wedge\to\Gamma$ 指的是从 $\wedge$ 到 Γ 的映射 f，满足 $f(a+b)=f(a)+f(b)$，$f(ab)=f(a)f(b)$，$f(0)=0,(a,b\in\wedge)$. 相应地，可定义幺半环同态和 $\wedge$-半模同态.

设 $\wedge$ 是一个半环，I 是 $\wedge$ 的双边理想，"$a\sim b\Longleftrightarrow$ 存在 i、$j\in I$，使得 $a+i=b+j$" 定义了 $\wedge$ 上的一个等价关系，我们把 $\wedge$ 的这个等价关系的商记为 $\wedge/I$，而 $a\in\wedge$ 所在的等价类记为 $\bar{a}$. 令 $\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}$，$\bar{a}\ \bar{b}=\overline{ab}$，不难验证这个定义与等价类代表元的选择无关，从而在 $\wedge/I$ 上定义了一个半环结构，称为 $\wedge$ 关于理想 I 的商半环. 在 $\wedge/I$ 中，$\bar{a}=\bar{0}$ 未必可推出 $a\in I$[1]. "$\bar{a}=\bar{0}\Longleftrightarrow a\in I$" 的充要条件是 "若 $a,b\in\wedge$，$a+b\in I$，$b\in I$，则 $a\in I$". 我们把满足上述条件的理想称为正规理想. 不难验证，I 是 $\wedge$ 的正规理想的充要条件是嵌入映射 u：$I\to\wedge$ 是 i-正规的[1].

设 $\wedge$ 是一个半环，所有左 $\wedge$-半模及 $\wedge$-半模同态构成一个半加法范畴，记为 $\wedge$-Smod.

以下若无特别说明，$\wedge$ 表示一个半环，$\wedge$-半模指 $\wedge$-左半模，$\wedge$ 的理想指双边理想.

* 本文于1989年1月16日收到.

定义 1 设$M\in\wedge-$Smod，$m\in M$，$A(M)=\{a\in\wedge\mid aM=0\}$称为$M$的零化子．$(0:m)=\{a\in\wedge\mid am=0\}$称为$m$的零化子．若$A(M)=0$，称$M$是忠实的．

易见，$A(M)$是$\wedge$的正规理想．$(0:m)$是$\wedge$的子半环．

定义 2 非零$\wedge$-半模M称为既约的，若M无真子半模．

命题 1 M是既约$\wedge$-半模的充要条件是对M中的任意非零元m，有$M=\wedge m$．

定义 3 $\wedge$称为本原半环，若存在一个忠实既约$\wedge$-半模M．$\wedge$的理想I称为本原理想，如果I是$\wedge$的正规理想，且$\wedge/I$是本原半环．

定义 4 $\wedge$是一个半环．如果$\wedge$没有本原理想，则定义$\wedge$的J－根为$\wedge$本身；如果$\wedge$有本原理想，则定义$\wedge$的J－根为$\wedge$的所有本原理想I_α $(\alpha\in\Omega)$ 的交$\bigcap\limits_{\alpha\in\Omega}I_\alpha$．$\wedge$的J-根记为$J(\wedge)$．

下面我们给出半环的J-根的另一种刻划．

命题 2 M是一个$\wedge-$半模．I是$\wedge$的理想，且$I\subseteq A(M)$．则$\wedge$-半模M与$\wedge/I$-半模M是等效的．

证明 若M是$\wedge$-半模，定义$\bar{a}m=am$，$a\in\wedge$，$m\in M$．如果$\bar{a}=\bar{b}$，则$a+t=b+s$，$t,s\in I\subseteq A(M)$，故$am=bm$，这样此运算与等价类$\bar{a}$的代表元选择无关，并使M是$\wedge/I$-半模，容易验证$\wedge$-半模M与$\wedge/I$-半模M是等效的．

反之，若M是$\wedge/I$-半模，定义$am=\bar{a}m$，$a\in\wedge$，$m\in M$，$\bar{a}\in\wedge/I$，则M是$\wedge$-半模且M作为$\wedge$-半模与作为$\wedge/I$-半模是等效的．

命题 3 I是$\wedge$的本原理想的充要条件是$I=A(M)$，M是一个既约$\wedge$-半模．

证明 充分性．由命题2知$M\in\wedge/I$-半模且M是既约$\wedge/I$-半模，$I=A(M)$是$\wedge$的正规理想．又由$I=A(M)$知$\wedge/I$-半模M是忠实的，因为若$\bar{a}M=\bar{0}$，则$aM=0$，所以$a\in A(M)=J$，故$\bar{a}=\bar{0}$．由定义知I是$\wedge$的本原理想．

必要性．I是$\wedge$的本原理想，所以I是正规的且$\wedge/I$有一个既约半模M，由命题2知M是既约$\wedge$-半模．若$aM=0$，则$\bar{a}M=0$，故$\bar{a}=\bar{0}$．由I的正规性得$a\in I$，故$A(M)\subseteq I$．而$I\subseteq A(M)$是显然的．

由命题3，我们得到$\wedge$的J-根的一个等价刻划：

定理 1 $\wedge$是半环．如果没有既约$\wedge-$半模，则$J(\wedge)=\wedge$；如果存在既约$\wedge$半模，则$J(\wedge)$为$\wedge$的所有既约半模$M_\alpha(\alpha\in\Omega)$的零化子$A(M_\alpha)$的交$\bigcap\limits_{\alpha\in\Omega}A(M_\alpha)$．

命题 4 设f：$\wedge\to\Gamma$是半环满同态，则$f(J(\wedge))\subseteq J(\Gamma)$．

证明 设M是既约Γ-半模，由半环同态f自然导出M是一个$\wedge$-半模，$am=f(a)m$．取$0\neq x\in M$，则$M=\Gamma x$，所以对于任意$y\in M$，存在$b\in\Gamma$，使得$y=bx$，但作为$\wedge-$半模，由于f满的，故存在$a\in\wedge$使得$y=ax$，所以$M=\wedge x$．由x的任意性，据命题1知M是既约$\wedge$-半模．取$a\in J(\wedge)$，M为任一个既约Γ-半模，$f(a)M=aM=0$，故$f(J(\wedge))\subseteq J(\Gamma)$．

命题 5 $J(\wedge)$是$\wedge$中零化所有既约$\wedge$-半模的最大理想，且是正规理想．

命题6　$J(\wedge/J(\wedge))=0$.

证明　命 $M_\alpha(\alpha\in\Omega)$是所有$\wedge$－既约半模，由定理1知$J(\wedge)\subseteq A(M_\alpha)$，$\alpha\in\Omega$. 由命题2知依该命题中定义的$\wedge/J(\wedge)$-半模$M_\alpha$与$\wedge$-半模$M_\alpha$是等效的.故$M_\alpha$是既约$\wedge/J(\wedge)$－半模. 而$\wedge/J(\wedge)$-半模$M_\alpha$的零化子为$A(M_\alpha)/J(\wedge)$. 所以

$$J(\wedge/J(\wedge))\subseteq\bigcap_{\alpha\in\Omega}(A(M)/J(\wedge))=J(\wedge)/J(\wedge)=\bar{0}.$$

由命题4—6知：半环的J-根是一个根性.

$\wedge$是一个半环，在$\wedge\times\wedge$中定义关系"$(a,b)\sim(c,d)\Longleftrightarrow$存在$x,y\in\wedge$使得$a+x=c+y$，$b+x=d+y$". 易证这是一个等价关系. 等价关系的商记为$K(\wedge)$，$(a,b)\in\wedge\times\wedge$所在的等价类记为$\overline{(a,b)}$. 令$\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(a+c,b+d)}$，$\overline{(a,b)}\,\overline{(c,d)}=\overline{(ac+bd,ad+bc)}$，则在$K(\wedge)$上定义了一个环的结构. 其中$-\overline{(a,b)}=\overline{(b,a)}$. 若$\wedge$带有单位元1，则$\overline{(1,0)}$是$K(\wedge)$中的单位元[1].

M是一个$\wedge$-半模，令$G(M)=\{m\in M\mid$存在$m'\in M$，使得$m+m'=0\}$. 易证$G(M)$是M的一个$\wedge$－子半模且$G(M)$对于加法构成一个加群. 这时称M为一个半环上的模. 定义$K(\wedge)$与$G(M)$的一个"数乘"运算：$\overline{(a,b)}m=am-bm$，则$G(M)$是环$K(\wedge)$上的一个模. 若N是环$K(\wedge)$上的一个模，令$a\cdot n=\overline{(a,0)}n$，$a\in\wedge$，$n\in N$，则$N$是半环$\wedge$上的一个模[1].

对环$K(\wedge)$而言，$J(K(\wedge))$表示环的Jacobson根，$J(K(\wedge))=\bigcap_{M\text{既约}K(\wedge)\text{模}}A(M)$. 下面我们讨论$J(K(\wedge))$与$K(J(\wedge))$的关系.

命题7　1)　M是一个$\wedge$-半模且M是既约的，则$G(M)=0$或$G(M)=M$.

2)　$G(M)$作为$\wedge$-半模是既约的，则$G(M)$作为$K(\wedge)$-模(由上面所定义的运算)是既约的.

3)　N是环$K(\wedge)$上的模，则N作为半环$\wedge$上的模(由上面所定义的运算)是既约的.

证明　1)　由于$G(M)$是M的子半模，由M的既约性即得.

2)　取$0\neq m\in M$，$G(M)=\wedge m$. 对任意$x\in G(M)$，$x=am$，$a\in\wedge$.所以$x=\overline{(a,0)}m=am$，故$G(M)=K(\wedge)m$. 由m的任意性知，$G(M)$作为环$K(\wedge)$上的模是既约的.

3)　取$0\neq n\in N$，对任意的$x\in N$，由于$N=K(\wedge)n$，有$x=\overline{(a,b)}m$，即$x=am-bm$，$a,b\in\wedge$，所以$N=\wedge n$. 由n的任意性知N作为半环$\wedge$上的模是既约的.

定理2　$\wedge$是一个半环，则$K(J(\wedge))\subseteq J(K(\wedge))$.

证明

$$\begin{aligned}K(J(\wedge))&=\{\overline{(a,b)}\mid a,b\in\supset J(\wedge)\}\\&=\{\overline{(a,b)}\mid a,b\in A(M),\ M\text{既约}\wedge-\text{半模}\}\\&\subseteq\{\overline{(a,b)}\mid a,b\in A(M),\ M\text{既约}\wedge-\text{模}\}\ (\text{命题}7.1))\\&=\{\overline{(a,b)}\mid a,b\in A(M),\ M\text{既约}K(\wedge)-\text{模}\}\ (\text{命题}7.2)、3))\\&\subseteq\{\overline{(a,b)}\mid\overline{(a,b)}\in A(M),\ M\text{既约}K(\wedge)-\text{模}\}\\&=J(K(\wedge)).\end{aligned}$$

作者衷心感谢陈昭木教授的指导与关怀.

参考文献

[1] Takahashi, M. On the bordism categories Ⅱ. Math., Sem, Notes, 1981, 8 : 495～530

[2] 刘绍学。环与代数。北京：科学出版社，1983。

[3] Anderson F W, Fuller K R. Rings and Categories of Modules, Springer-Verlag, 1974.

[4] Takahashi M. Wang H X. (王华雄). On epimorphisms of semimodules. Kobe J. Math., to appear.

[5] 陈清华。关于优半模。福建师范大学学报(自然科学版)，1988，4(3)：11～17。

[6] Wang H X. A Note on endomorphism semirings of semimodules, Kobe J. Math., 1988(5):155～160

J-radicals of Semirings

Lin Yanan

(*Department of Mathematics*)

Abstract

In this paper, let $\wedge$ be a semiring and $K(\wedge)$ is the ring induced by $\wedge$. We firs introduce the concept of J-radicals of semirings and present a characterization in terms of $\wedge$-semimodules. We also prove that it is a radical property. Furthermore, we discuss the relation between $K(J(\wedge))$ and $J(K(\wedge))$ which is the Jacobson radical of ring $K(\wedge)$.

Key words: semiring, $\wedge$-semimodule, J-radical of semiring