

厦门大学硕士研究生毕业论文

任意截面单模光纤传输 特性分析方法的研究

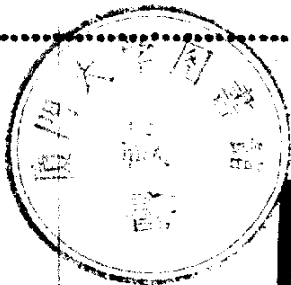
系(所、室): 物理系
专 业: 光(电子)学
研究方向: 光纤通讯
研究生姓名: 张学军
指导教师: 石守勇 副教授



一九九〇年七月

目 录

摘要 (附英文).....	(I)
I 引言.....	(2)
II 阶跃型光纤特征方程的严格求解.....	(4)
A. 特征方程的求解步骤.....	(4)
B. 归一化波导参量 $\frac{d(bv)}{dv}$, $v \frac{d^2(bv)}{dv^2}$ 及 $\frac{d^3(vb)}{dv^3}$ 的计算.....	(8)
1) 近似式表示法.....	(8)
2) Petermann 模场半径表示法.....	(9)
3) 数值微分法.....	(10)
4) 严格数值求解法.....	(10)
C. 归一化波导参量 (及其各阶导数) 近似表达式的分析.....	(18)
III 单模光纤色散特性分析方法的探讨.....	(22)
A. 基本公式.....	(22)
B. 计算色散的程序框图.....	(25)
C. 结果与讨论.....	(28)
IV 曲线坐标系下的特征方程.....	(37)
A. 普遍情形.....	(37)
B. 抛物柱坐标系下的特征方程.....	(39)
V 结论.....	(42)



致谢..... (43)

参考文献..... (44)

附录..... (51)

A. Bessel 函数的递推 (微积分) 关系式 (51)

B. 由特征方程求 $\frac{d(w_b)}{dV}$, $\frac{d^2(w_b)}{dV^2}$ 及 $\frac{d^3(w_b)}{dV^3}$ 或

$A(V)$, $\frac{dA(V)}{dV}$ 及 $\frac{d^2A(V)}{dV^2}$ (53)

C. 正交曲线坐标系..... (59)

(一) 普遍公式..... (59)

(二) 圆柱坐标系..... (60)

(三) 椭圆柱坐标系..... (60)

(四) 抛物柱坐标系..... (60)

任意截面单横光纤传输特性分析方法的研究

摘 要

本文对阶跃型单横光纤的特征方程进行了计算机的严格求解，在此基础上，找到了相应区间上的归一化波导参量的经验公式并对阶跃型单横光纤的色散特性进行了详细的分析，对光纤结构的最佳设计提供了理论依据。为了能研究不同纤芯形状的光纤的传输特性，我们还提出了在曲线坐标系下由两相嵌的正交抛物线组成的纤芯的构想，得出其场具有 Hermite-Gaussian 这种简单形式解。本文的结果对理论工作者和光纤设计者具有一定的参考价值。

Investigations of An Analytic Method of Propagation
Characteristics of Single-mode Step-index Fibers with
Arbitrary Cross-sections

Abstract

Rigorous solution to the Eigenvalue equation of single-mode step-index fibers has been obtained with a desk computer; on this basis, we have got a group of empirical approximations for the mode dispersion in specific V -ranges, and given a detail analyses of dispersion characteristics of single-mode ^{fibers} which provides references to the structural optimum design of single mode fibers. Furthermore, we have also advanced a new suggestion that fiber's core consist of two normalized intersected parabola with the same focal length, and in such a curve coordinate, a simple field of Hermite-Gaussian function has been obtained. The paper is useful to the research workers and designers of optical fibers.

I. 引言

单模光纤用于干线传输和海底光缆通信有损耗低、传输容量大等优点。目前在零色散波长附近的单模传输带宽已达到 $100\text{GHz} \cdot \text{km}$, nm 以上; 而且与集成光学器件组成的单模系统又有极高速的信息传输处理能力。因此, 对单模光纤传输特性的分析研究受到光纤理论工作者的重视[1-3]。解决这类问题的关键是由 Maxwell 波动方程出发根据波导的截面形状和/或折射率分布找出相应的场分布, 进而由其特征方程或 Rayleigh 商直接求出传播常数。本文试图提出自己系统的分析方法, 并在与其它方法比较的基础上对此进行研究。

这里, 选择阶跃型单模光纤作为研究对象, 其原因是: 第一, 简化了物理模型, 由于在这种波导中折射率分布是分区均匀的, 可以避免由于求解矢量波动方程带来的繁杂数学运算, 且不失其应用价值; 第二, 便于对不同形状的纤芯光滑边界, 建立不同的曲线坐标系, 然后运用标量波动方程及相应的边界条件, 严格求解其特征方程。这样对一些梯度(渐近)折射率分布就可以用微扰法或等效折射率法求出其近似解。由此就可进一步分析实际光纤的传输特性。

本文分为三部分。第一部分是阶跃型光纤特征方程的严格求解, 其中与 D. Gloag [4] 的近似作了比较。在这里, 通过对准确解的数值结果进行曲线拟合, 找到了各个归一化波导参量合

适的经验公式，给光纤传输特性参量的计算带来了极大的方便；第二部分是给出准确求解任意折射率剖面单模光纤的色散的步骤，并对阶跃型光纤的色散特性进行详细的讨论，为单模光纤的设计提供了理论依据；第三部分对曲线坐标系下的特征方程的求解方法进行探讨，首次提出抛物柱坐标系中由两正交抛物线相嵌可形成多种纤芯形状的构想，其场表达式具有易分析的Hermite-Gaussian函数的形式，这将对分析单模光纤的传播特性带来极大的方便。

II. 阶跃型光纤特征方程的严格求解

A. 特征方程的求解步骤

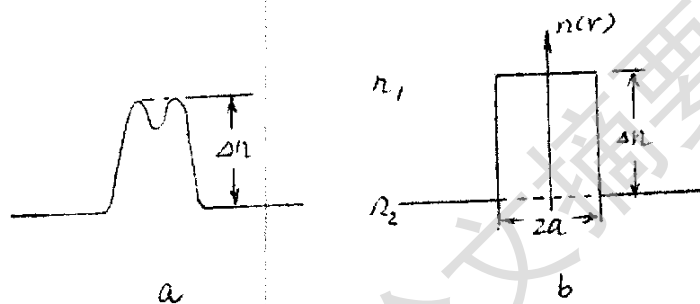


Fig. 1 Real (a) and ideal step-index profile (b) (The dip at the center of (a) is due to the out diffusion of the dopant during the collapse process).

实际的阶跃型光纤大都用 MCVD 工艺制造。为处理问题方便起见，一般把折射率剖面看作理想的阶跃型波导，它们的几何形状如图 1 所示，其中 n_1 为芯层最大折射率， n_2 为包层折射率， $2a$ 为纤芯直径。其特征方程的准确形式早已给出，这里给出文献 [5] 的形式

$$\left[\frac{J'_l(u)}{uJ_l(u)} + \frac{K'_l(w)}{wK_l(w)} \right] \left[\frac{n_1^2 J'_l(u)}{uJ_l(u)} + \frac{n_2^2 K'_l(w)}{wK_l(w)} \right] = l^2 \left(\frac{1}{w^2} + \frac{1}{u^2} \right) \left(\frac{\beta}{k_0} \right)^2 \quad (1)$$

除 $u = ka$, $w = qa$ 外, 其它符号意义与文献[5]相同。其中, 横向传播常数

$$u = k_0 a \sqrt{n_1^2 - (\beta/k_0)^2} \quad (2)$$

$$w = k_0 a \sqrt{(\beta/k_0)^2 - n_2^2} \quad (3)$$

注意到(1)式可看作 $J'_l(u) / (u J_l(u))$ 的二次方程式, 由是

$$\frac{J'_l}{u J_l} = -\left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2}\right) \frac{K'_l}{w K_l} \pm \left[\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}\right) \left(\frac{K'_l}{w K_l}\right) + \left(\frac{\rho\beta}{n_1 k_0}\right) \left(\frac{1}{2u^2} + \frac{1}{u^2}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

这里省去了 Bessel 函数的宗量。运用到 Bessel 函数的递推关系 (见附录 A), 并注意到定义

归一化频率:

$$V^2 = u^2 + w^2 = k_0^2 a^2 (n_1^2 - n_2^2) \quad (5)$$

相对折射率差:

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \quad (6)$$

归一化传播常数:

$$b = \frac{w^2}{V^2} = \frac{(\beta/k_0)^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \quad (7)$$

(4) 式化为

$$\text{EH 模 } (l > 0) \quad \text{或 TE 模 } (l = 0): \quad \frac{J_{l+1}}{u J_l} = (1-\Delta) \frac{K'_l}{w K_l} + \left(\frac{l}{u^2} - R\right) \quad (8A)$$

$$\text{HE 模 } (l > 0) \quad \text{或 TM 模 } (l = 0): \quad \frac{J_{l-1}}{u J_l} = -(1-\Delta) \frac{K'_l}{w K_l} + \left(\frac{l}{u^2} - R\right) \quad (8B)$$

其中

$$R = \left[\Delta^2 \left(\frac{K_0}{\omega K_0} \right)^2 + l^2 \left(\frac{1}{u^4} + \frac{2(1-\Delta)}{u^2 W^2} + \frac{1-2\Delta}{\omega^4} \right) \right]^{1/2} \quad (8c)$$

这样，只要给定 V 和 Δ 即可由 (5)、(8) 两式求出阶跃型光纤不同模式的各阶的传播常数。注意我们这里给出的是严格的特征方程，其结果可保留至 Δ^2 项，而大多数文献均用 $G\log e$ 的弱波导近似（文献 [4] 的 (10) 式，即这里的 Δ 的零级近似），但是在处理双折射等传播特性时 [6]，有时还需用到 Δ 的一级近似（文献 [4] 的 (11) 式）；在讨论高数值孔径光纤或茎模近截止态问题时， Δ^2 项仍需保留（即这里的精确式 (8)）。所以，我们这里给出的 (8) 式是普适的。对于我们将要讨论的茎模 HE_{11} 模（即 $l=1$ ），其特征方程为

$$f_1(u, W) = V^2 - u^2 - W^2 = 0 \quad (9a)$$

$$f_2(u, W) = \frac{J_0}{4J_1} - (1-\Delta) \left(\frac{K_0}{\omega K_1} + \frac{1}{u^2} \right) + R - \frac{1}{u^2} \quad (9b)$$

对 (9) 式的求解，我们是用拟牛顿法 [7] 进行的。这种方法对求解非线性方程组特别有效，求解的结果是振荡式地逼近真值，稳定性高。其收敛速度由图 2 可以看出， u 越小（近截止态的小 V 区）， $J_0/(4J_1) - V$ 曲线越陡，说明要达到合适精度，其收敛速度越快。

拟牛顿法求解非线性方程组的程序框图见文献 [7]。这里求解的初值选为

$$W = \begin{cases} 1.122 \exp \left\{ -\frac{J_0(V)}{V J_1(V)} \right\}, & V < 0.9 \\ 1.1428V - 0.9960, & V \geq 0.9 \end{cases} \quad (10)$$

程序是在 IBM PC (8088) 型微机上用编译 BASIC 语

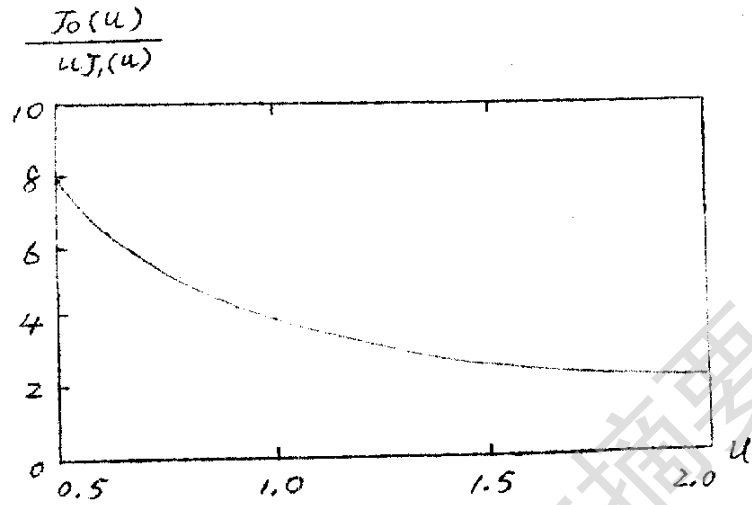
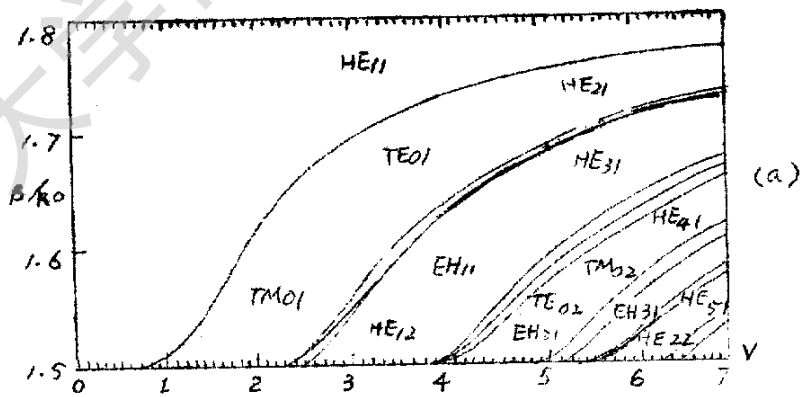


Fig. 2 $J_0(u) / uJ_1(u)$ vs. u .

言通过的。子程序中在计算 Bessel 函数值时取其展开式 [8] 的前 8 项。(9) 式中 $|f_i(u, w)|$ ($i=1, 2$) 不大于 10^{-6} ；计算一律用单精度。图 3 给出了两种不同相对折射率差的 $\beta/k_0 - V$ 曲线。很容易看出，在弱波导条件下 ($\Delta \ll 1$)，各模式退化为相应的线性模。



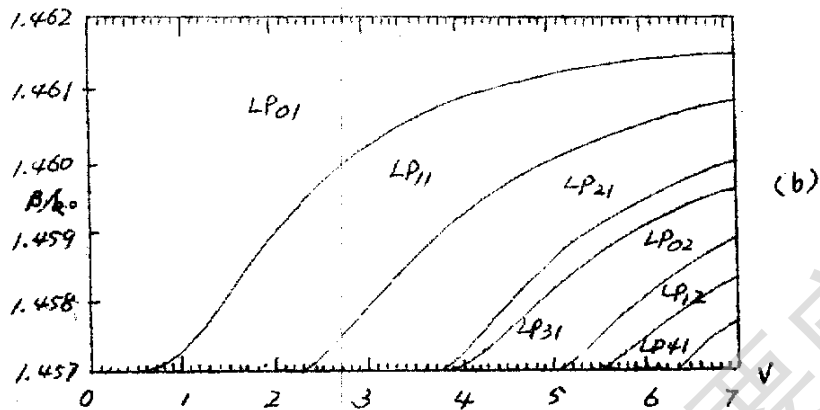


Fig. (3). Comparison of dispersion relationships with different refrax-index difference for step-index fibers

(a) $n_1=1.80$, $n_2=1.50$; (b) $n_1=1.462$, $n_2=1.457$.

B 归一化波导参数 $\frac{d(bV)}{dV}$, $V \frac{d^2(bV)}{dV^2}$ 及 $\frac{d^3(bV)}{dV^3}$

的计标

在分析光波导色散特性时,仅知道 b 是不够的,还需要求出它的各阶导数。下面将对计标这些参数的几种方法进行分析 and 比较。

1) 近似式表示法 [9]。文献 [9] 对归一化波导参数的表达式及其精度进行了详细的分析,指出虽然它们可以给出相当准确的近似式 $b(V)$,但由此导出的 $V(Vb)''$ 的精度均不满意,更不用说它们的高阶导数了,而且这些表达式主要是针对阶跃型光纤的。然而,近似表达式由于大大减少了计标量,因此有必要对此进一步探讨,这我们放在本节的 C 进行讨论。

2) Petermann 模场半径表示法 [10]。对于阶跃型弱波导 [4]，

$$\frac{d(bV)}{dV} = 1 - \frac{u^2}{V^2} \left[1 - 2 \frac{K_0^2(u)}{K_1^2(u)} \right] \quad (11)$$

而 Petermann 模场半径定义为 [11]

$$W_p = \left[\frac{2 \int_0^\infty |\psi(r)|^2 r dr}{\int_0^\infty |d\psi/dr|^2 r dr} \right]^{1/2} \quad (12)$$

对于阶跃型单模光纤，由其场表达式及附录 A 可求得

$$W_p^2 = (2/w^2) J_1^2(u) / J_0^2(u) \quad (13)$$

弱波导近似下 HE₁₁ 模特征方程为

$$\frac{J_0(u)}{u J_1(u)} = \frac{K_0(w)}{w K_1(w)} \quad (14)$$

由 (11)、(13)、(14) 式联立，得

$$\frac{d(bV)}{dV} = \frac{4}{V^2 W_p^2} \quad (15)$$

从而有

$$V \frac{d^2(bV)}{dV^2} = 4 \frac{d}{dV} \left(\frac{1}{V W_p^2} \right) \quad (16)$$

对于阶跃型光纤， W_p 可近似地表示为 [10]

$$W_p = 0.634 + 1.619 V^{-3/2} + 2.879 V^{-6} - 1.561 V^{-7} \quad (17)$$

此式在 $V [1.5, 2.5]$ 内相对误差小于 1%。

需要指出的是，虽然 (15)、(16) 式是由阶跃型光纤求得，由文献 [12] 的分析可知，这种方法适用于任意折射率剖百

光纤，只要由(12)式求得的 w_p 代入(15)、(16)式即可。不难看出，由于 $d(bV)/dV$ 是直接求得，因此 b 的高阶导数比由 b 直接求导要来得准确，而且这种方法可用来分析任意折射率剖面光纤。但当 $V < 1.5$ 时计算的 $V(Vb)^2$ 的误差仍然很大。

3) 数值微分法(13)、(14)。这种方法主要是针对任意折射率剖面直接由标号波动方程或 Rayleigh 商求得高精度的 b 值，然后运用数值微分法即可求出 b 的各阶导数。这种方法由于截断误差和折入误差的存在，使得最终结果的误差相当大，而且计算一个高阶导数点需其邻域多个精确的 b 值，这计算量相当大。

4) 严格的数值求导。以上几种方法虽然适应范围广、简便，但要求出精确的 b 的高阶导数均不满足要求。下节将给出阶跃型光纤的数值结果(见表 I、表 II、图 4、图 5)，其归一化波导参数的分析表达式见附录 B。由以上结果可知，对弱波导($\Delta \ll 1\%$)情形， b 的各阶导数的计算可用弱波导近似(即 $\Delta = 0$)的结果进行计算，但对高数值孔径的光纤或近截止态(即小 V 值)的光纤，必须改换精确求导。

以上四种计算方法都有各自的优缺点，如果能够从中找到一种简便实用的计算方法是很有意义的，下小节 C 我们将对这个问题进行探讨。

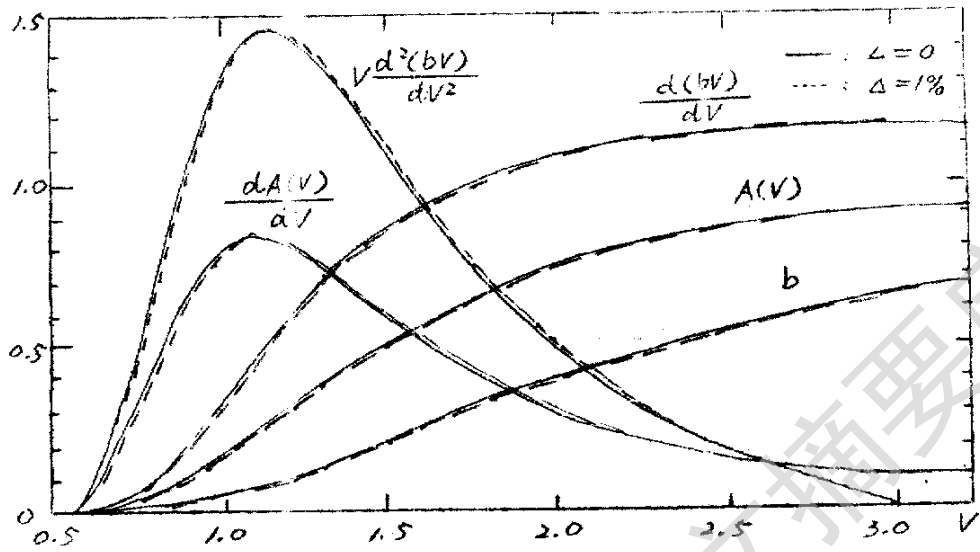


Fig. 4 normalized waveguide parameters b , $(bV)'$, $V(bV)''$, $A(V)$, $A'(V)$, as a function of the normalized frequency V for step-index fibers with different Δ .

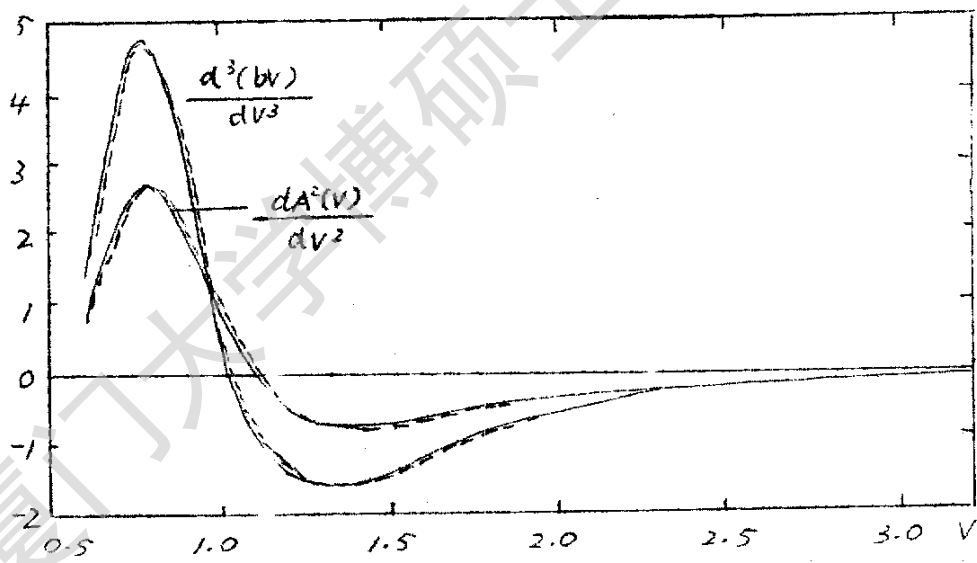


Fig. 5 The same as Fig. 4 except it is for $(bV)''$ and $A''(V)$.

Table I
Waveguides Parameters Calculated with Exact Eigenvalue Equation for HE₁₁ mode of Step-index Fiber +
(for $\Delta \neq 0$)

V	u	W	b	(Vb)'	V(Vb)''	(Vb)'''	A(V)	A'(V)	A''(V)	A'''(V)
0.6	0.5999740	0.0055886	0.0000868	0.00184	0335	1.36	0.00097	0.029	0.7	
0.7	0.6995718	0.0244865	0.0012231	0.01880	2305	4.06	0.01001	0.177	2.2	
0.8	0.7974336	0.0640286	0.0064057	0.074376	6337	4.67	0.04038	0.438	2.72	
0.9	0.8913373	0.1245706	0.0191578	0.17445	0602	2.82	0.09681	0.675	1.87	
1.0	0.9793108	0.2023619	0.0409503	0.30249	3456	0.607	0.17172	0.8036	0.715	
1.2	1.1341260	0.3921207	0.1067769	0.56412	43986	-1.545	0.33545	0.7905	-0.590	
1.4	1.2618060	0.6065030	0.1876764	0.77072	20935	-1.6410	0.47920	0.6401	-0.8095	
1.5	1.316887	0.7181974	0.2292478	0.84919	06313	-1.4508	0.53922	0.56102	-0.76466	
1.6	1.366981	0.8314821	0.2700635	0.91317	91928	-1.2326	0.59162	0.46825	-0.68799	
1.8	1.454475	1.060425	0.3470685	1.006203	663989	-0.84021	0.67664	0.36753	-0.52108	
2.0	1.528184	1.290215	0.4161635	1.065254	462257	-0.55514	0.74071	0.27784	-0.38206	
2.2	1.591059	1.519385	0.4769690	1.101788	309256	-0.36367	0.78938	0.21229	-0.27898	
2.4	1.645311	1.747270	0.5300261	1.123556	195084	-0.23805	0.826791	0.1442956	-0.205131	
2.5	1.669740	1.860637	0.5539150	1.130574	1495789	-0.19264	0.842244	0.1452475	-0.176618	
2.8	1.734203	2.198304	0.6163954	1.141430	0477677	-0.101913	0.878913	0.1022861	-0.114879	
3.0	1.771089	2.421414	0.6514716	1.143072	1.0015036	-0.066165	0.897272	0.0821843	-0.087627	
3.2	1.804031	2.643005	0.6821752	1.142025	0.0326063	-0.042335	0.912100	0.0667568	-0.067677	

Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士论文摘要库