厦门大学硕士研究生毕业论文

区间动力系统若干稳定性问题

系(所室)：计算机与系统科学

专　　业：系　统　工　程

研究方向：大系统理论及其应用

研 究 生：黄　敬　前

指导教师：蔡维滋　教授

§1 引言

近几十年来，随着控制、网络、信息、计算机等学科的发展，不约而同地提出了所谓鲁棒性问题，即要研究一个系统在特定的结构扰动下的某些性质的不变性，这类问题有很强的实际背景，通常一个数学模型描述一个实际系统如物理、工程、经济、生物数学等总是近似的，或者问题的原始数据只知界限，不能精确知道，或者测量误差、计算中舍入的误差或者为了必要的简化（象非线性问题线性化）。所以，严格地说，每个参数都有一定变域，有些参数甚至无法测定。模糊控制、灰色控制正是处理这类问题，抽象成数学问题便是区间动力系统。

自一九七八年起，苏联微分方程杂志和国际控制论以及国内的一些杂志，先后发表了许多有关区间动力系统稳定性方面的文章。本文着重探讨区间矩阵稳定性问题，给出一些新的稳定判据。

考虑一个由下列微分方程组描述的线性动力系统：

$$\dot{x} = Ax \qquad (1.1)$$

我们将研究（1.1）在 A 不完全知道的情况下的稳定性，即不知道 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素的确切值，仅知其上下界。

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$P=(p_{ij})_{n\times n}$，$Q=(q_{ij})_{n\times n}$ 均是实矩阵，

$$P\leq A\leq Q$$

表示：$p_{ij}\leq a_{ij}\leq q_{ij}$ $(i,j\in I_n=\{1,2,\cdots,n\})$

以 $N(P,Q)$ 表示所有满足：$P\leq A\leq Q$ 的矩阵 A 的集合，P、Q 中的元素都是确切地知道的，而矩阵 $A\in N(P,Q)$ 的元素是不确定的，因此矩阵 $A\in N(P,Q)$ 称为一个区间矩阵 [1]，动力系统（1.1）称为一个区间动力系统 [1]。

定义1·1　区间矩阵$N(P, Q)$称为稳定的，如果$\forall A \in N(P, Q)$，A是稳定的，即(1·1)式的解是渐近稳定的，记为：$N(P, Q) \in S$

定义1·2　称区间矩阵$N(P, Q)$是完全不稳定的，如果$\forall A \in N(P, Q)$，A不是稳定的，即(1.1)式的解不是渐近稳定的，记为

$$N(P, Q) \in US$$

Bialas[2]最先提出用p_{ij}、q_{ij}构成的矩阵的稳定性来判别$N(P, Q)$的稳定性，他用$M(P, Q)$表示所有$S = (S_{ij})_{n \times n}$的集合，其中$S_{ij} = p_{ij}$或者$S_{ij} = q_{ij}$ ($i, j \in I_n$)。遗憾的是，他未经证明就得出如下失真的结论：

$N(P, Q) \in S$当且仅当$M(P, Q) \in S$.

R. Barmish第二年在文[3]中根据举出了一个反例，说明1983年Bialas在文[2]中提出的上述结论对于充分性不成立。

此后，研究$N(P, Q)$稳定性问题较有代表性的主要有．

A·Heinen[4]利用Gershgorin圆盘定理和徐道义[5]、方晓昕[6]、[7]、[8]利用Liapunov函数，比较原理给出了较简捷的稳定判据；

方晓昕用分块迭代分析法讨论了一类大区间矩阵的稳定[9]，给出了一类特殊的区间矩阵稳定的主要判据[10]；

徐道义[11]用解Liapunov矩阵方阵程的方法取得一更有一般性的结果；

此外，还有Chao Shun Zhou[12]用Bellman关于矩阵特征值的估计方法进行讨论等等．

对于Bialas文[2]中提出的失真命题，Zhi-Cheng Shi和Wei-Bing Gao在文[13]中指出：对于对称区间矩阵是有效的，即证明了这样一个结论：

设P、Q是实对称阵，定义$L(P, Q) = \{A = (a_{ij})_{n \times n}$

$\in R^{n\times n} \mid p_{ij} \leqslant a_{ij} \leqslant q_{ij} ;\ a_{ij} = a_{ji} ;\ i, j \in I_n \}$ 为对称区间矩阵。$L(P, Q) \in S$ 当且仅当 $M(P, Q) \in S$。

文[13]令人不满意的是，它判定的仅仅是 $L(P, Q)$ 而非 $N(P, Q)$，同时即使对于 $L(P, Q)$ 而言，验证起来仍然十分麻烦，因为虽然 $M(P, Q)$ 是有限个矩阵（ $2^{\frac{1}{2}(n^2+1)}$ 个）组成，但当 $n \gg 1$ 时，其所含数目将陡然增加，可见要验证 $M(P, Q)$ 中每个矩阵是相当不方便。

本文利用对称矩阵特征根之间的不等式关系，在§2部分给出当 P、Q 为实对称阵时，判定 $N(P, Q)$ 稳定的充分判据，而且这些判据，　　　　运用起来比文[13]来得简捷得多，只需研究两个矩阵，同时还得到了当 P、Q 为实对称阵时 $N(P, Q)$ 的稳定的充分必要条件和不稳定判据，以及当 P、Q 为一般实矩阵时，$N(P, Q)$ 的稳定性的某些新判据。

接着本文§3部分，利用§2中的主要结果，讨论了两类时变系统的稳定性问题。

最后，§4部分应用比较原理，给出了对区间矩阵 $N(P, Q)$ 进行降维判定的方法。

§2　一类区间矩阵的稳定判据

引理2.1[15] 设A、B是实对称阵，若（A－B）是半正定阵，则：

$$\lambda_{max}(A) \geq \lambda_{max}(B)$$

$$\lambda_{min}(A) \geq \lambda_{min}(B)$$

当（A－B）是正定阵时，不等号成立．

引理2·2　设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$均是实对称阵，若$a_{ij} \geq b_{ij} \geq 0$，$\bar{\lambda} \geq \max\limits_{i\in I_n}|\lambda_i(A)|$，则

$(\bar{\lambda}I \pm A)$和$(\bar{\lambda}I+B)$至少是半正定阵（即半正定阵或正定阵）。

证明：设η_i是$\bar{\lambda}I \pm A$的特征根，那么由：

$det[\eta_i I-(\bar{\lambda}I \pm A)]=0$知$\eta_i(\bar{\lambda}I \pm A)=\bar{\lambda} \pm \lambda_i(A)$，

$\because \bar{\lambda} \geq \max\limits_{i\in I_n}|\lambda_i(A)|$

$\therefore \bar{\lambda} \pm \lambda_i(A) \geq 0$，亦即$\eta_i(\bar{\lambda}I \pm A) \geq 0$

从而证得$\bar{\lambda}I \pm A$至少是半正定阵

下面证明$(\bar{\lambda}I+B)$也至少是半正定阵。

假设

$$f_1(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)=X^T(\bar{\lambda}I-A)X$$

$$f_2(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)=X^T(\bar{\lambda}I+B)X$$

则有

$$\begin{aligned} & f_2(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \\ &= \bar{\lambda}x_1^2+\bar{\lambda}x_2^2+\cdots+\bar{\lambda}x_n^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j \\ &\geq \sum_{i=1}^{n}\bar{\lambda}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}|x_i|\cdot|x_j| \\ &\geq \bar{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_i|\cdot|x_j| \end{aligned}$$

$= f_1(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)$

前面已证得（$\bar{\lambda}I-A$）至少是半正定阵

因此，$f_2(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \geq 0$

从而亦证得（$\bar{\lambda}I+B$）至少是半正定阵。 证毕.

定理2.1 设A、B是实对称阵，记$M=(m_{ij})_{n\times n}$

$m_{ij}=\begin{cases}0, & i=j,\\ q_{ij}-p_{ij}, & i\neq j,\end{cases}$ 若存在$\lambda \geq \max\limits_{i\in I_n}|\lambda_i(M)|$，使得：

$$\lambda_i(\lambda I+Q)<0$$

则 $N(P, Q)\in S$

证明： $\because \lambda \geq \max\limits_{i\in I_n}|\lambda_i(M)|$

$\therefore$由引理2.2知：$\lambda I-M$至少是半正定阵。

今对$\forall A\in N(P, Q)$

(1) 先证$\lambda I+(Q-\frac{A+A^T}{2})$至少是半正定阵.

事实上，若记$B(b_{ij})_{n\times n}=\lambda I+(Q-\frac{A+A^T}{2})$，于是当$i=j$时，$b_{ii}=\lambda+q_{ii}-a_{ii}\geq\lambda$；当$i\neq j$时$b_{ij}=q_{ij}-\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})\leq q_{ij}-p_{ij}$。因此，当$i\neq j$时，$m_{ij}\geq b_{ij}\geq 0$，则由引理2.2知

$$\bar{B}=\begin{pmatrix}\lambda, & b_{12}, & b_{13}, \cdots, & b_{1n}\\ b_{21}, & \lambda, & b_{23}, \cdots, & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_{n1}, & b_{n2}, & b_{n3}, \cdots, & \lambda\end{pmatrix}$$ 至少是半正定

阵。$\because$ $\bar{B}$至少是半正定阵，且$X^T(B-\bar{B})X\geq 0$，$X^TBX \geq X^T\bar{B}X\geq 0$，故$B=\lambda I+(Q-\frac{A+A^T}{2})$也至少是半正

定阵。

(2) 今证明 $Re\lambda_i(A)<0$

因为 $(\lambda I+Q)-\frac{A+A^T}{2}$ 至少是半正定阵，因而由引理 2.1，知道

$$\lambda_{max}(\lambda I+Q)\geq\lambda_{max}\left(\frac{A+A^T}{2}\right)$$

根据书[16]第227页结论有

$$Re\lambda_i(A)\leq\max_{i\in I_n}\lambda_i\left(\frac{A+AI}{2}\right)$$

因此，当 $\lambda_i(\lambda I+Q)<0$ 时，$Re\lambda_i(A)<0$

所以由 A 的任意性且 $A\in N(P,Q)$，证得：

当 $\lambda_i(\lambda I+Q)<0$ 时，$N(P,Q)\in S$。　　证毕.

引理 2.3[17] A、B 是实对称阵，则 $\lambda_{min}(A)+\lambda_{min}(B)\leq\lambda_{min}(A+B)$，$\lambda_{max}(A+B)\leq\lambda_{max}(A)+\lambda_{max}(B)$

定理 2.2　设 P，Q 是实对称矩阵，记 $\lambda=\max\limits_{i\in I_n}|\lambda_i(Q-P)|$，当 $2|\lambda_{max}(Q)|>|\lambda_{min}(P)|$ 时，$N(P,Q)\in S$ 的充要条件是 $\lambda_i(\lambda I+Q)<0$

证明：充分性

$\forall A\in N(P,Q)$ 设 $B=Q-\frac{A+A^T}{2}$，则当 $i\neq j$ 时，$b_{ij}=q_{ij}-\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\leq q_{ij}-P_{ij}$；当 $i=j$ 时，$b_{ii}=q_{ii}-a_{ii}\leq q_{ii}-P_{ii}$，$\therefore B\leq Q-P$，又 $\because\lambda=\max\limits_{i\in I_n}|\lambda_i(Q-P)|$

∴由引理2.2 $\lambda I+(Q-\frac{A+A^T}{2})$至少是半正定阵，∴由引理2.1有：$\lambda_{max}(\lambda I+Q)\geq\lambda_{max}(\frac{A+A^T}{2})$，又根据[16]第227页结论有：$Re\lambda_i(A)\leq\lambda_{max}(\frac{A+A^T}{2})$，因此，当$\lambda_i(\lambda I+Q)<0$时，$Re\lambda_i(A)<0$，∴由A的任意性，我们证得：$N(P,Q)\in S$。

必要性 依Perron—Frobenius定理 $\lambda=\max(Q-P)$ 再由引理2.3知

$$\lambda_P(Q-P)\leq\lambda_{max}(Q)+\lambda_{max}(-P)$$
$$=\lambda_{max}(Q)-\lambda_{min}(P)$$

∵ $N(P,Q)\in S$，有$\lambda_i(P)<0$，$\lambda_i(Q)<0$，又由$det[\lambda_{max}(\lambda I+Q)-(\lambda I+Q)]=0$ 有$det[\lambda_{max}(\lambda I+Q)I-\lambda)]=0$得$\lambda_{max}(\lambda I+Q)-\lambda=\lambda_i(Q)$，∴当$2|\lambda_{max}(Q)|>|\lambda_{min}(P)|$时有

$$\lambda_{max}(\lambda I+Q)\leq\lambda(Q-P)+\lambda_{max}(Q)$$
$$\leq 2\lambda_{max}(Q)-\lambda_{min}(P)<0$$ 证毕.

由定理2.2的证明过程，可以得到

推论 在定理2.2条件下，若$2\lambda_{max}(Q)-\lambda_{min}(P)<0$，则

$N(P,Q)\in S$ 当且仅当P, Q稳定。

引理2.4 [18] 对称矩阵A的谱半径不大于矩阵A的任何一种范数.

定理2.3 设P、Q是实对称阵，当$\|Q-P\|<|\lambda_{max}(Q)|$时，$\lambda_i(\lambda I+Q)<0$（这里$\lambda=\max\limits_{i\in I_n}|\lambda_i(Q-P)|$）是$N(P,Q)$

$\in S$的充要条件

证明：必要性

∵ 当$N(P,Q)\in S$时，$\lambda_{max}(Q)<0$

又由条件$\|Q-P\|<|\lambda_{max}(Q)|$ 和由引理2.4知：

$$\lambda\leqslant\|Q-P\|<|\lambda_{max}(Q)|$$

$$\therefore\ \lambda+\lambda_{max}(Q)<0$$

从而证得$\lambda_i(\lambda I+Q)=\lambda+\lambda_i(Q)\leqslant\lambda+\lambda_{max}(Q)<0$.

充分性显然。 证毕。

推论 当$\|Q-P\|<|\lambda_{max}(Q)|$时，$N(P,Q)\in S$，当且仅当$Q\in S$.

下面，在前边的基础上建立一个更有一般性的定理。

定理2.4 Q是实对称阵，P为一般实方阵，记$M=(m_{ij})_{n\times n}$：

$$m_{ij}=\begin{cases}0, & i=j,\\ q_{ij}-\min\{p_{ij},p_{ji}\}, & i\neq j.\end{cases}$$

若存在$\lambda\geqslant\max\limits_{i\in I_n}|\lambda_i(Q-P)|$使得：

$$\lambda_i(\lambda I+Q)<0\text{，则}$$

$$N(P,Q)\in S$$

本定理是利用定理1的证明过程加以改造，因此这里不再加以证明。

考虑$N(P,Q)$，P、Q是一般的实方阵，构造两个新的矩阵$P_1(p_{ij}^{(1)})$和$Q(q_{ij}^{(1)})$，其中：

$$p_{ij}^{(1)}=p_{ji}^{(1)}=\max\{p_{ij},p_{ji}\},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

$$q_{ij}^{(1)}=q_{ji}^{(1)}=\min\{q_{ij},q_{ji}\},\quad i,j=1,2,\cdots n.$$

从而P_1和Q_1是对称阵，且$N(P_1,Q_1)$包含在$N(P,Q)$之中．

$\forall A\in N(P,Q)$，A总可分解为：$A=A_0+A_1+A_2$，其中$A_0\in N(P_1,Q_1)$，$A_1\in N(P-P_1,0)$，$A_2\in N(0,Q-Q_1)$，[例见附录1]。记$\alpha=\|P-P_1\|+\|Q-Q_1\|$其中范数取$\|M\|=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|m_{ij}|$，那么我们有下边结论：

定理2.5　对于$N(P,Q)$，记$M(m_{ij})$形为

$$m_{ij}=\begin{cases}0, & i=j,\\ q_{ij}^{(1)}-p_{ij}^{(1)}, & i\neq j,\end{cases}\quad i,j\in I_n.$$

设$\lambda=\max\limits_{i\in I_n}|\lambda_i(Q-P)|$，若$\lambda_{max}(\lambda I+Q_1)+\alpha<0$，则：

$$N(P,Q)\in S$$

证明：$\forall A\in N(P,Q)$，$\because Re\,\lambda_i(A)\le\lambda_{max}(\frac{A+A^T}{2})$（书[16]第227页结论），$\therefore$有

$$\begin{aligned}Re\,\lambda_i(A)&=Re\,\lambda_i(A_0+A_1+A_2)\\&\le\lambda_{max}(\frac{A_0+A_0^T}{2}+\frac{A_1+A_1^T}{2}+\frac{A_2+A_2^T}{2})\\&\le\frac{1}{2}\lambda_{max}[A_0+A_0^T]+\frac{1}{2}\lambda_{max}[A_1+A_1^T]\\&\quad+\frac{1}{2}\lambda_{max}[A_2+A_2^T]\end{aligned}$$

$A_0\in N(P_1,Q_1)$，由条件，同定理2.1第一步证明类似，结合引理2.1可得

$$\lambda_{max}(\frac{A_0+A_0^T}{2})\le\lambda_{max}(\lambda I+Q)$$

再依引理2.4：对称阵A的谱半径不大于矩阵A的任何一种范数。故有

$$\frac{1}{2}\lambda_{max}(A_1+A_1^T)\leq\frac{1}{2}\|A_1+A_1^T\|\leq\|P-P_1\|$$

$$\frac{1}{2}\lambda_{max}(A_2+A_2^T)\leq\frac{1}{2}\|A_2+A_2^T\|\leq\|Q-Q_1\|$$

因此，$Re\lambda_i(A)\leq\frac{1}{2}\lambda_{max}(A_0+A_0^T)+\alpha\leq\lambda_{max}(\lambda I+Q_1)+\alpha<0$

$\therefore A\in S$，由于A的任意性，故：

$$N(P,Q)\in S$$ 证毕.

引理2.5[11] 当$q_{ii}<0$；$p_{ij}\geq 0\ (i\neq j)$时，$N(P,Q)\in S$当且仅当$Q\in S$. 这里P,Q为一般方阵。

对于一般的区间矩阵$N(P,Q)$，设$\varepsilon>0$，

$$p_{ij}^{(2)}=\begin{cases}p_{ii}+\varepsilon, & i=j,\\ p_{ij}, & i\neq j,\end{cases}\quad i,j\in I_n$$

$$q_{ij}^{(2)}=\begin{cases}q_{ii}+\varepsilon & i=j\\ \min\{q_{ij},q_{ji}\} & i\neq j,\end{cases}\quad i,j\in I_n$$

从而得到一个新的区间矩阵$N(P_2,Q_2)$，其中Q_2是实对称阵，那么：

$\forall A\in N(P,Q)$，A总可分解成

$A=A_0+A_1$，其中$A_0\in N(P_2,Q_2)$，$A_1\in N(P_3,Q_3)$

$P_3=-\varepsilon I$，Q_3形为：$q_{ij}^{(3)}=\begin{cases}-\varepsilon, & i=j,\\ q_{ij}-q_{ij}^{(2)}, & i\neq j,\end{cases}\quad i,j\in I_n.$

[例见附录2]。

定理2.6 $N(P,Q)$若满足

1) 对于$N(P_2,Q_2)$，记$M=(m_{ij})_{n\times n}$形为

$$m_{ij}=\begin{cases}0, & i=j,\\ q_{ij}^{(2)}-\min\{p_{ij},p_{ji}\}, & i\neq j,\end{cases}\quad i,j\in I_n$$

存在$\lambda\geq\max\limits_{i\in I_n}|\lambda_i(M)|$使得：$\lambda_i(\lambda I+Q)<0$

2) $\frac{1}{2}(Q_3+Q_3^T)$稳定.

则 $N(P,Q)\in S$

证明：$\forall A\in N(P,Q)$，A分解为：$A=A_0+A_1$，其中$A_0\in N(P_2,Q_2)$，$A_1\in N(P_3,Q_3)$

$\because$在$N(P_2,Q_2)$上满足定理2.5(条件1)

$\therefore N(P_2,Q_2)\in S$，$Re\lambda_i(A_0)<0$

又$A_1\in N(P_3,Q_3)$，$\therefore\frac{A_1+A_1^T}{2}\in N(P_3,\frac{Q_3+Q_3^T}{2})$

而由条件2：$\frac{Q_3+Q_3^T}{2}$稳定，因此由引理2.5，知：

$N(P_3,\frac{Q_3+Q_3^T}{2})\in S$，$\therefore\lambda_{max}(\frac{A_1+A_1^T}{2})<0$

故
$$\begin{aligned}Re\,\lambda_i(A)&=Re\lambda_i(A_0+A_1)\\&\leq\lambda_{max}[\tfrac{1}{2}(A_0+A_0^T)+\tfrac{1}{2}(A_1+A_1^T)]\\&\leq\lambda_{max}\frac{A_0+A_0^T}{2}+\lambda_{max}\frac{A_1+A_1^T}{2}\\&<0\end{aligned}$$

$\therefore A\in S$

从而由A的任意性证得：$N(P,Q)\in S$.　　证毕.

定律2.7〈不稳定判据〉

对于$N(P,Q)$，其中P,Q均为实对称阵，设$M(m_{ij})_{n\times n}$

形为：

$$m_{ij}\begin{cases}0, & i=j,\\ q_{ij}-p_{ij}, & i\neq j,\end{cases}$$ 时 的对称阵. 若 $\lambda\geq$

$\max\limits_{i\in I_n}|\lambda_i(M)|$ 使得：

$$\lambda_i(-\lambda I+P)>0$$

则 $N(P,Q)\in US$

证明：任取 $A\in N(P,Q)$

1) 先证 $\frac{A+A^T}{2}-(-\lambda I+P)$ 至少是半正定阵.

记 $B(b_{ij})=\lambda I+\frac{A+A^T}{2}-P$，有

当 $i=j$ 时，$b_{ii}=\lambda+a_{ii}-p_{ii}\geq\lambda$

当 $i\neq j$ 时，$b_{ij}=\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}-p_{ij}\leq q_{ij}-p_{ij}$

由于 $\lambda\geq\lambda\max\limits_{i\in I_n}|\lambda_i(M)|$，依引理 2.2 知：$\lambda I-M$ 至少是半正定阵。

而 $m_{ij}\geq b_{ij}\geq 0$ $(i\neq j)$，因此依引理 2.2 知：

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}\lambda, & b_{12}, & b_{13}, & \cdots & b_{1n}\\ b_{21}, & \lambda, & b_{23}, & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots & \\ b_{n1}, & b_{n2} & b_{n3}, & \cdots & \lambda\end{pmatrix}$$ 也至少是半正定阵。

又 $X^T(B-\overline{B})X\geq 0$，$X^TBX\geq X^T\overline{B}X$；$\therefore X^TBX\geq 0$，$\therefore B$ 也至少是半正定阵。

2）证明 $Re\lambda_i(A)>0$

由引理2.1，因为 $\frac{A+A^T}{2}-(-\lambda I+P)$ 至少是半正定阵，故

$$\lambda_{min}\frac{A+A^T}{2}\geq\lambda_{min}(-\lambda I+P)$$

∴由定理假设的条件得

$$\lambda_{min}\frac{A+A^T}{2}\geq\lambda_{min}(-\lambda I+P)>0$$

根据书[6]第227页有结论：

$$Re\lambda_i(A)\geq min\lambda_i(\frac{A+A^T}{2})$$

∴ $Re\lambda_i(A)>0$，由 A 的任意性得

$N(P,Q)\in US$ 证毕。

类似于定理2.5的思想，也可得到对于 P、Q 为一般方阵时，$N(P,Q)\in US$ 的判据。

假设 $N(P_1,Q_1)$ 与 α 如定理2.5中定义，那么有：

定理2.8 对于 $N(P,Q)$，记 $M(m_{ij})$ 的形为：

$$m_{ij}=\begin{cases}0, & i=j,\\ q_{ij}^{(1)}-p_{ij}^{(1)}, & i\neq j,\end{cases}\quad i,j\in I_n$$

设 $\lambda=\max\limits_{i\in I_n}|\lambda_i(M)|$，若 $\lambda_{min}(-\lambda I+P_1)-\alpha>0$，

则：

$$N(P,Q)\in S$$

证明：$\forall A\in N(P,Q)$

$$Re\lambda_i(A)=Re\lambda_i(A_0+A_1+A_2)$$
$$\geq\lambda_{min}\left[\frac{A_0+A_0^T}{2}+\frac{A_1+A_1^T}{2}+\frac{A_2+A_2^T}{2}\right]$$

$$\geq \lambda_{min}\frac{A_0+A_0^T}{2}+\lambda_{min}\frac{A_1+A_1^T}{2}+\lambda_{min}\frac{A_2+A_2^T}{2}$$

（引理2·3）

（注：这里A_0、A_1、A_2意义也同定理2.5中假设）

∵ $A_0 \in N(P_1, Q_1)$ 依定理2.1第一步证明的结果，结合引理2.1可得

$$\lambda_{min}\frac{A_0+A_0^T}{2} \leq \lambda_{min}(-\lambda I+P_1)$$

又由引理2.4：对称阵A的谱半径不会大于矩阵的任何一种范数，故得：

$$Re\lambda_i(A) \geq \lambda_{min}(\lambda I+Q_1)-\alpha>0$$

∴ $A \in US$，由A的任意性，证得

$N(P, Q) \in US$.　　　　证毕.

§3 时变系统稳定性的判据

对于常系统线性微分方程组

$$\dot{x} = Ax \tag{3.1}$$

而言，如果$|A-\lambda I|=0$的根均具有负实部，则（3.1）的零解是渐近稳定的

但是，对于时变系统

$$\dot{x} = A(t)x$$

来说，这里矩阵$A(t)$的元素可微、有界，是否还有同样的结论呢？一般说来是不成立，这可参见下面例题：

例［20］考虑

$$\frac{dx_1}{dt} = (-1-9\cos^2 bt+12\sin bt\cos bt)x_1 + (12\cos^2 bt+9\sin bt\cos bt)x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (-12\sin^2 bt+9\sin bt\cos bt)x_1 - (1+9\sin^2 bt+12\sin bt\cos bt)x_2$$

求其特征根，由特征方程

$$\begin{vmatrix} (-1-9\cos^2 bt+12\sin bt\cos bt)-\lambda & 12\cos^2 bt+9\sin bt\cos bt \\ -12\sin^2 bt-9\sin bt\cos bt & (-1-9\sin^2 bt-12\sin bt\cos bt)-\lambda \end{vmatrix}$$

$=\lambda^2+11\lambda+10=(\lambda+1)(\lambda+10)=0$，于是其特征根是负的，分别为$-1$、$-10$。然而这个系统并不是个稳定系统。它的通解为：

$$x_1=a_1e^{2t}(\cos t+2\sin bt)+a_2e^{-13t}(\sin bt-2\cos bt)$$