厦门大学硕士研究生毕业论文

随机动态复合系统的
渐近P-稳定性和分散P-镇定

系(所、室)：计算机与系统科学系

专　　业：运筹学与控制论

研究方向：滤波与随机控制

研究生姓名：郭　　洪

指导教师：李文清教授

一九八七年六月

随机动态复合系统的

渐近P-稳定性和分散P-镇定

郭洪

（厦门大学计算机与系统科学系）

摘要

本文考虑的非线性随机复合系统（NSCS）是由N个带Gauss噪音的非线性关联子系统所组成的。对于有限维的NSCS，给出了其渐近P-稳定和分散P-镇定的两个充分性条件以及两个例子。对于无穷维的NSCS，定义了它的温和解，并分别在Banach空间和Hilbert空间上给出了其渐近P-稳定的充分性条件。

目录

§0：主要记号

Ω 由抽象点 $\{\omega\}$ 所组成的样本空间

$\mathcal{F}$ Ω 中的某些子集所成的 σ－代数

$\mathbb{P}$ $\mathcal{F}$ 上的概率测度

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 概率空间

R^+ 时间区间 $[0, +\infty)$

t_0 初值时刻

$\mathbb{R}^n$ n 维 Euclid 空间

$\mathbb{R}^{n\times n}$ $n\times n$ 维实矩阵空间

$\lambda_M(A)$ 对称实矩阵 A 的最大特征值

A^T 实矩阵 A 的转置

$\in$ 属于

$|\cdot|$ Euclid 空间上的向量范数，它定义为

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}, \quad 其中\ x=(x_1,\cdots,x_n)^T \in R^n$$

$\|\cdot\|_e$ 对应于向量范数 $|\cdot|$ 的实矩阵的范数，它定义为

$$\|A\|_e = [tr(A^T A)]^{1/2}，其中\ tr\ 表示迹$$

$\|\cdot\|_f$ 由 $|\cdot|$ 诱导的实矩阵的范数，它定义为

$$\|A\|_f = [\lambda_M(A^T A)]^{1/2}, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$\|\cdot\|_{e,f}$ 矩阵范数 $\|\cdot\|_e$ 或 $\|\cdot\|_f$

$\mu(A)$ 实矩阵 A 的测度，它定义如下

$\mu(A)=\lim\limits_{\theta\to 0^+}[\|I+\theta A\|_f-1]/\theta$，$I$为单位矩阵

ω-a.e.	对几乎处处的$\omega\in\Omega$
$L_1(t_0,+\infty)$	对ω-a.e.，$(t_0,+\infty)$上关于t Lebasgue 绝对可积的随机过程全体
Z	Banach 空间
$\|\cdot\|_Z$	Z上点的范数或Z上线性算子的范数
H	Hilbert 空间
$\|\cdot\|_H$	H上点的范数或H上线性算子的范数
$\mu(\mathcal{A})$	线性反射紧算子$\mathcal{A}$的测度
$\sigma(\mathcal{A})$	线性反射紧算子$\mathcal{A}$的谱集
$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{N} M_i$	N个空间$M_i(i=1,\cdots,N)$的乘积空间
$m(t)$	随机过程的数学期望函数
$K(s,t)$	随机过程的协方差矩阵函数

§1. 引 言

所谓复合系统就是指由一些关联子系统组成的系统。自六十年代起，人们对确定性复合系统的稳定性问题已经做过大量的研究工作，也取得了大量的研究成果[1—7]。但是，人们发现由实际复合系统的研究所产生的理论结果与实际结果有时不相符合。这是因为：一方面，由于客观世界运动规律的复杂性，复合系统常常要受到外界和内部的干扰，使得复合系统的某些特性有时会发生畸变；另一方面，由于我们描述实际物理现象的复合系统的数学模型往往是通过经验估计，参数辨识和诸如测量、计标之类物理手段等方法得到的，这就难免会受到一些复杂的、不确定的因素的影响而使数学模型不是完全精确的。于是，人们要合理地研究随机微分方程所描述的复合系统，以适应工程实际的需要[8—11]。特别是在工程控制论方面，人们为了研究随机复合系统的统计特性，往往必须首先弄清楚这种带有随机特征的控制系统的稳定性问题。因此，随机复合系统的稳定性理论已经在工程上的应用和理论上的探讨引起人们的注意[10—14]。

与随机复合系统的稳定性紧密联系的问题就是随机复合系统的控制问题，因为随机复合系统的稳定性往往要通过随机复合系统的控制加以实现。随机复合系统的控制特点就是分散化，即只允许各个受控随机子系统利用本身的信息进行控制。由于各个受控随机子系统实际上是相互关联的，所以在什么条件下使用局部分散化控制能够保证这些相互关联的随机子系统所组成的随机复合系统是稳定的，这个问题无疑具有重要的实际意义[14—16]。

目前，随机复合系统的稳定性和分散化控制镇定问题的研究工作虽然取得了一些成果[8-18]，但是，还存在大量的工作要做。Michel 和Miller 1977 年[11]研究了有限维随机复合系统的稳定性问题，但他们没有研究其渐近 p- 稳定性和分散 p- 镇定问题，同时，他们所考察的随机复合系统是Ito型随机微分方程所描述的；Socha 1986 年[17-18]研究了随机复合系统的渐近 p- 稳定性问题，Socha 和Willems 1985 年[14]研究了随机复合系统的分散控制镇定问题，但他们都是用微分不等式的方法，构造各个随机关联子系统的Lyapunov函数，所论的随机复合系统又局限在有限维的情形；文献[5]、[11]、[19-21]虽然讨论了无穷维复合系统的稳定性问题，但所论的系统都不是随机的；文献[15]，[22-23]分别在Banach 空间、Hilbert 空间和Euclid 空间上讨论了随机系统的控制镇定、最优控制和渐近 p- 稳定性问题，但所论的随机系统都不是复合系统。

基于上述实际背景，本文研究了由N个带Gauss 噪音的随机关联子系统所组成的一类非线性随机复合系统的渐近 p- 稳定性问题。分别对有限维随机复合系统和无穷维随机复合系统给出了其渐近 p- 稳定的充分性条件。举了两个例子说明所得结果的应用。此外，还考虑了分散化控制镇定问题。当所考察的随机复合系统不是渐近 p- 稳定时，可以制定分散化控制策略加以镇定。

与大多数文献不同，本文不用Ito型随机微分方程描述非线性随机复合系统，也不用研究系统稳定性问题所常用的构造Lyapunov 函数那套方法，而是利用推广的Bellman-Gronwall 积分不等式、随机微分方程和泛函分析等工具来研究非

线性随机复合系统，从而得到一些新的结果。

§2：预备知识（基本定义、引理和定理）

定义 2.1[24] 称二随机过程 $\{\xi_1(t,\omega),\ t\geq t_0\}$ 和 $\{\xi_2(t,\omega),\ t\geq t_0\}$ 是随机等价的，如果对任意固定的 $t\in[t_0,+\infty)$，有

$$\mathbb{P}\{\omega:\xi_1(t,\omega)=\xi_2(t,\omega)\}=1$$

定义 2.2[24] n 维随机过程 $\{\xi(t,\omega),\ t\geq t_0\}$ 的数学期望函数和协方差矩阵函数分别定义为

$$m(t)=E\xi(t,\omega)=\int_\Omega \xi(t,\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

$$\begin{aligned}K(s,t)&=CoV(\xi(s,\omega),\xi(t,\omega))=\\&=E[(\xi(s,\omega)-m(s))(\xi(t,\omega)-m(t))^T]\end{aligned}$$

定义 2.3[24] 如果随机过程 $\{\xi(t,\omega),t\geq t_0\}$ 对任一组有限的 $t_1,\cdots t_n\in[t_0,+\infty)$，$\xi(t_1,\omega),\cdots\cdots,\xi(t_n,\omega)$ 的联合分布总是 Gauss 的，那么称过程 $\{\xi(t,\omega),t\geq t_0\}$ 是 Gauss 随机过程。如果一个 n 维随机过程的每一分量都是 Gauss 随机

过程，那么称这个 n 维随机过程是Gauss 随机过程。

Gauss 随机过程由它的一、二阶矩唯一决定。如果它的一、二阶矩：

$$m(t) \triangleq \text{常数}\quad , \quad K(s,t)=K(t-s) \triangleq K(\tau)$$

那么称该Gauss 过程为弱平稳Gauss 随机过程。

弱平稳Gauss随机过程的谱密度阵 $S(\lambda)$ 与协方差阵 $K(\tau)$ 的关系是

$$S(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\exp\{-j\lambda\tau\}d\tau, \quad \lambda\text{为实数}$$

$$K(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda)\exp\{j\lambda\tau\}d\lambda \quad \tau\text{为实数}$$

Gauss 过程是可分、可测、连续的随机过程。

定理 2.1.[23] 对于随机系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t,\omega)}{dt}=G(x(t,\omega),t,\xi(t,\omega)) & t\geq t_0 \\ x(t_0,\omega)=x_0(\omega) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

其中 $\{\xi(t,\omega),t\geq t_0\}$ 是取值于 R^m 的可分、可测随机过程，$x(t,\omega)\in R^n$，$t\in(t_0,+\infty]$，如果 $G(\cdot,\cdot,\cdot)$ 是一个关于 (x,t,ξ) 的Borel 可测函数，且满足条件：

i）存在一个非负随机过程 $B(t,\omega)\in L_1(t_0,+\infty)$，使得对一切 $x_1, x_2\in R^n$，有

$$|G(x_2(t,\omega),t,\xi(t,\omega))-G(x_1(t,\omega),t,\xi(t,\omega))|\leq B(t,\omega)|x_2(t,\omega)-x_1(t,\omega)|$$

ii）随机过程 $G(x_0(\omega),t,\xi(t,\omega))\in L_1(t_0,+\infty)$，$G(x(t,\omega),t,$

$\xi(t,\omega)) \in \mathbb{L}_1(t_0,+\infty)$.

那么随机系统（2.1）有唯一解 $x(t,\omega)$ ，它对一切 $t\in(t_0,+\infty)$ 是 $\omega-a.e.$ 绝对连续的。

注 2.1. 本文的"唯一"一律指随机等价意义下的唯一。

定理 2.2. 如果下面的随机系统（2.2）满足定理 2.1 的存在唯一解的全部条件

$$\begin{cases} \dot{x}(t,\omega)=A(t)x(t,\omega)+y(x(t,\omega),t,\xi(t,\omega)), \ t\geq t_0 \\ x(t_0,\omega)=x_0 \end{cases} \quad \cdots(2.2)$$

其中 $x(t,\omega)\in R^n$ ， $A(t)\in \mathbb{R}^{n\times n}$ ，其元素关于 $t\geq t_0$ 连续，

$y(x(t,\omega),t,\xi(t,\omega))\in \mathbb{R}^n$ ，其样本函数关于 $t\geq t_0$ 连续。那么随机系统（2.2）的唯一解是

$$x(t,\omega)=\phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\phi(t,s)y(x(s,\omega),s,\xi(s,\omega))ds, \ t\geq t_0 \cdots(2.3)$$

上面的积分是在 $\omega-a.e.$ 意义下的 Lebesgue 积分。其中 $\phi(t,s)$ 是对应于 $A(t)$ 的基本矩阵，它有性质[10]：

i) $\phi(t,t)=I$ $\qquad t_0\leq t<+\infty$

ii) $\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,s)=A(t)\phi(t,s)$ $\qquad t_0\leq s\leq t<+\infty$

iii) $\phi^{-1}(t,s)=\phi(s,t)$ $\qquad t_0\leq s\leq t<+\infty$

iv) $\phi(t,l)\phi(l,s)=\phi(t,s)$ $\qquad t_0\leq s\leq l\leq t<+\infty$

证明：只须验证（2.3）是（2.2）的解。由（2.3）知 $x(t_0,\omega)=x_0$ ，再对（2.3）式关于 t 求导并根据 $\phi(t,s)$

的上述性质，得

$$\begin{aligned}\dot{X}(t,\omega)&=A(t)\phi(t,t_0)X_0(\omega)+\phi(t,t)y(X(t,\omega),t,\xi(t,\omega))\\&\quad+\int_{t_0}^{t}A(t)\phi(t,s)y(X(s,\omega),s,\xi(s,\omega))ds\\&=A(t)[\phi(t,t_0)X_0(\omega)+\int_{t_0}^{t}\phi(t,s)y(X(s,\omega),s,\xi(s,\omega))ds]\\&\quad+y(x(t,\omega),t,\xi(t,\omega))\\&=A(t)x(t,\omega)+y(x(t,\omega),t,\xi(t,\omega))\end{aligned}$$

这说明（2.3）是（2.2）的解。

证毕

定理2.3[25] 设$A(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$的每一元素都在$[t_0,+\infty)$上连续，那么齐次系统

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)\qquad t\geq t_0$$

的基本矩阵$\phi(t,s)$满足如下不等式：

$$\|\phi(t,s)\|_f\leq\exp\{\int_s^t\mu(A(\tau))d\tau\}\qquad t_0\leq s\leq t<+\infty$$

其中对应于矩阵范数$\|\cdot\|_f$的$A(t)$的矩阵测度

$$\mu[A(t)]=\lambda_M[(A(t)+A(t)^T)/2]$$

定理2.4 对于随机系统

$$\begin{cases}\dot{X}(t,\omega)=G(X(t,\omega),t,\xi(t,\omega))\\X(t_0,\omega)=X_0(\omega)\end{cases}\qquad(t\geq t_0,\ \omega\text{-a.e.})\qquad ---(2.4)$$

其中$\{\xi(t,\omega), t\geq t_0\}$是取值于$\mathbb{R}^n$的可分、可测的随机过程，$X(t,\omega)\in Z$（$Z$是Banach空间），如果$G(\cdot,\cdot,\cdot)$是一个$(X, t, \xi)$—Lebesgue可测示子，且满足条件：

i). 存在一个非负随机过程$B(t,\omega)\in L_1(t_0,+\infty)$，使得对一切$X_1, X_2\in Z$，有

$$\|G(X_2(t,\omega),t,\xi(t,\omega))-G(X_1(t,\omega),t,\xi(t,\omega))\|_Z\leq B(t,\omega)\|X_2(t,\omega)-X_1(t,\omega)\|_Z$$

ii). 随机过程$G(X_0(\omega),t,\xi(t,\omega))$及$G(X(t,\omega),t,\xi(t,\omega))$对$\omega$-a.e. 关于$t$在$(t_0,+\infty)$上Bochner绝对可积且连续. 那么随机系统(2.4)存在唯一解，它对一切$t\geq t_0$是绝对连续的（ω-a.e.）.

证明：将微分方程(2.4)写成等价的方程

$$X(t,\omega)=X_0(\omega)+\int_{t_0}^{t}G(X(s,\omega),s,\xi(s,\omega))ds \quad (t\geq t_0, \omega\text{-a.e.}) \qquad \text{---}(2.5)$$

然后用逐步逼近法证明这个积分方程(2.5)的解存在且唯一，其步骤如下：

1) 存在性：

定义序列$\{X^{(m)}(t,\omega), m\geq 0\}$如下：$X^{(0)}(t,\omega)=X_0(\omega)$，

$$X^{(m+1)}(t,\omega)=X_0(\omega)+\int_{t_0}^{t}G(X^{(m)}(s,\omega),s,\xi(s,\omega))ds \quad m\geq 0, \qquad \text{----}(2.6)$$

对充分大的$t_1>t_0$及充分大的$M>0$，考虑闭域D：

$t_0\leq t\leq t_1$, $\|X^{(m)}(t,\omega)\|_Z\leq M$, $|\xi(t,\omega)|\leq M$. $(m\geq 0)$.

由（2.6）式及条件 i），得

$$\|X^{(1)}(t,\omega)-X^{(0)}(t,\omega)\|_Z \leq \int_{t_0}^{t} \|G(X_0(\omega),s,\xi(s,\omega))\|_Z ds$$

$$\begin{aligned}
\|X^{(2)}(t,\omega)-X^{(1)}(t,\omega)\|_Z &\leq \int_{t_0}^{t} \|G(X^{(1)}(s,\omega),s,\xi(s,\omega)) - G(X^{(0)}(s,\omega),s,\xi(s,\omega))\|_Z ds \leq \int_{t_0}^{t} B(s,\omega)\|X^{(1)}(s,\omega) - X^{(0)}(s,\omega)\|_Z ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} B(s,\omega)\int_{t_0}^{s} \|G(X_0(\omega),\tau,\xi(\tau,\omega))\|_Z d\tau ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} B(s,\omega)ds \int_{t_0}^{t} \|G(X_0(\omega),s,\xi(s,\omega))\|_Z ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|X^{(3)}(t,\omega)-X^{(2)}(t,\omega)\|_Z &\leq \int_{t_0}^{t} \|G(X^{(2)}(s,\omega),s,\xi(s,\omega)) - G(X^{(1)}(s,\omega),s,\xi(s,\omega))\|_Z ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} B(s,\omega)\|X^{(2)}(s,\omega)-X^{(1)}(s,\omega)\|_Z ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} B(s,\omega)\int_{t_0}^{s} B(\tau,\omega)d\tau \int_{t_0}^{s} \|G(X_0(\omega),\tau,\xi(\tau,\omega))\|_Z d\tau ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|G(X_0(\omega),s,\xi(s,\omega))\|_Z ds \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}\frac{(\int_{t_0}^{s} B(\tau,\omega)d\tau)^2}{2} ds \\
&= \int_{t_0}^{t} \|G(X_0(\omega),s,\xi(s,\omega))\|_Z ds \left[\int_{t_0}^{t} B(s,\omega)ds\right]^2 / 2
\end{aligned}$$

依此类推，得到对 $m \geq 0$，

$$\begin{aligned}
\|X^{(m+1)}(t,\omega)-X^{(m)}(t,\omega)\|_Z &\leq \int_{t_0}^{t} \|G(X_0(\omega),s,\xi(s,\omega))\|_Z ds \left[\int_{t_0}^{t} B(s,\omega)ds\right]^m / m! \\
&\leq \int_{t_0}^{t_1} \|G(X_0(\omega),s,\xi(s,\omega))\|_Z ds \left[\int_{t_0}^{t_1} B(s,\omega)ds\right]^m / m!
\end{aligned}$$

---(2.7)

由条件 i)、ii) 及(2.7)知序列 $\{X^{(m)}(t,\omega): t_0\le t\le t_1,\ \omega-a.e.\}$ 一致收敛。于是存在极限

$$\lim_{m\to+\infty} X^{(m)}(t,\omega)\triangleq X(t,\omega)$$

$X(t,\omega)$ 是连续函数序列一致收敛的极限函数，因而也是连续函数。

现在要证这个 $X(t,\omega)$ 满足积分方程(2.5)。对一切 $t\in[t_0,t_1]$ 和 $m\geqslant 0$，我们有

$$\|X(t,\omega)-X_0(\omega)-\int_{t_0}^{t} G(X(s,\omega),s,\xi(s,\omega))ds\|_Z$$

$$=\|X(t,\omega)-X^{(m+1)}(t,\omega)+\int_{t_0}^{t}G(X^{(m)}(s,\omega),s,\xi(s,\omega))ds-\int_{t_0}^{t}G(X(s,\omega),s,\xi(s,\omega))ds\|_Z$$

$$\leqslant\|X(t,\omega)-X^{(m+1)}(t,\omega)\|_Z+\int_{t_0}^{t}B(s,\omega)\|X^{(m)}(s,\omega)-X(s,\omega)\|_Z ds$$

$$\leqslant\|X(t,\omega)-X^{(m+1)}(t,\omega)\|_Z+\int_{t_0}^{t_1}B(s,\omega)\|X^{(m)}(s,\omega)-X(s,\omega)\|_Z ds$$

由于此处的 $X^{(m)}(t,\omega)$ 对于 t 在 $[t_0,t_1]$ 上一致收敛于 $X(t,\omega)$，这就证明了极限函数 $X(t,\omega)$ 满足积分方程(2.5)。从(2.5)再根据积分的绝对连续性可知，$X(t,\omega)$ 对 $\omega-a.e.$ 关于一切 $t\in[t_0,t_1]$ 是绝对连续的。

2)、唯一性：

设(2.5)有二个解 $X(t,\omega)$ 和 $Y(t,\omega)$，即

$$\left.\begin{aligned}X(t,\omega)&=X_0(\omega)+\int_{t_0}^{t}G(X(s,\omega),s,\xi(s,\omega))ds\\ Y(t,\omega)&=X_0(\omega)+\int_{t_0}^{t}G(Y(s,\omega),s,\xi(s,\omega))ds\end{aligned}\right\}\quad ----(2.8)$$

我们要证对 $\omega-a.e.$ ，$\|X(t,\omega)-Y(t,\omega)\|_Z=0$，$t\in[t_0,t_1]$。

如果对 $\omega-a.e.$ ，$t\in[t_0,t_1]$，$\|X(t,\omega)-Y(t,\omega)\|_Z>0$ ，则由（2.8）式及条件 i），可得

$$\|X(t,\omega)-Y(t,\omega)\|_Z\leq\int_{t_0}^{t}\|G(X(s,\omega),s,\xi(s,\omega))-G(Y(s,\omega),s,\xi(s,\omega))\|_Z ds$$

$$\leq\int_{t_0}^{t}B(s,\omega)\|X(s,\omega)-Y(s,\omega)\|_Z ds$$

$$\leq\int_{t_0}^{t}B(s,\omega)\int_{t_0}^{s}B(\tau,\omega)d\tau\int_{t_0}^{s}\|X(\tau,\omega)-Y(\tau,\omega)\|_Z d\tau ds$$

$$\leq\int_{t_0}^{t}\|X(s,\omega)-Y(s,\omega)\|_Z ds\left[\int_{t_0}^{t}B(s,\omega)ds\right]^2/2$$

$$\leq\cdots\cdots\leq$$

$$\leq\int_{t_0}^{t}\|X(s,\omega)-Y(s,\omega)\|_Z ds\left[\int_{t_0}^{t}B(s,\omega)ds\right]^m/m!$$

令 $m\to+\infty$ ，得 $\|X(t,\omega)-Y(t,\omega)\|_Z\to0$，矛盾。这就证明了对 $\omega-a.e.$，$t\in[t_0,t_1]$，$\|X(t,\omega)-Y(t,\omega)\|_Z=0$.

3）把（2.5）的解 $X(t,\omega)$ 从 $[t_0,t_1]$ 延拓到 $[t_0,+\infty)$

取 $t_0'=t_0+(t_1-t_0)/2$ ，$t_1'=t_1+(t_1-t_0)/2$ ，然后以初值 $X(t_0',\omega)=X_0'(\omega)$ 代替原来的初值 $X(t_0,\omega)=X_0(\omega)$，重复上面的讨论，可得到在 $[t_0',t_1']$ 上的一个解 $X'(t,\omega)$。在 $[t_0,t_1']$ 上定义新解 $\widetilde{X}(t,\omega)$

$$\widetilde{X}(t,\omega)=\begin{cases}X(t,\omega), & 当 t\in[t_0,t_1]\\ X'(t,\omega), & 当 t\in[t_1,t_1']\end{cases}$$

它是积分方程（2.5）的唯一解。重复这一过程，便可得到在$[t_0, +\infty]$上的（2.5）的唯一解。

证毕

上面证明的是最一般的无穷维随机系统解存在性和唯一性定理。在工程控制论中，人们需要研究如下较特殊的无穷维随机系统。

定理2.5．如果对于如下随机系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t,\omega) = A(t)x(t,\omega) + y(x(t,\omega), t, \xi(t,\omega)), & t \geq t_0 \\ x(t_0,\omega) = x_0(\omega) \end{cases} \quad \cdots\cdots(2.9)$$

$x(t,\omega) \in Z$（Z为Banach空间），$A(t): Z \to Z$是时变线性稠定闭算子，关于t在$[t_0, +\infty]$上强连续并产生温和发展算子$\mathcal{U}(t,s)$；$y(x(t,\omega), t, \xi(t,\omega)): Z \times [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^m \to Z$是时变非线性算子，它关于$t$有一阶连续导数，关于$\xi$有一阶连续偏导数，关于$x$有一阶连续Frechet导数；$x_0(\omega) \in \mathcal{D}(A(t))$，那么随机系统（2.9）有唯一解$x(t,\omega)$，它在$[t_0, +\infty]$上连续可微：

$$x(t,\omega) = \mathcal{U}(t,t_0)x_0(\omega) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{U}(t,s) y(x(s,\omega), s, \xi(s,\omega)) ds, \quad t \geq t_0 \quad \cdots(2.10)$$

上面的积分是在Bochner意义下的积分。其中温和发展算子具有性质[26]：

i）$\mathcal{U}(t,t) = I$　　　I为单位算子，$t \geq t_0$