厦门大学硕士研究生毕业论文

分散扰动解耦结构不变子空间的确定

系（所．室）：计算机与系统科学系

专　　　　业：运筹学与控制论

研 究 方 向：大系统理论及应用

研究生姓名：郑　文　礼

指 导 教 师：贺建勋教授

一九八七年六月

分散扰动解耦结构不变子空间的确定

郑文礼

（厦门大学计算机与系统科学系）

摘要

本文从两通道分散扰动解耦结构不变子空间应该满足的条件出发，讨论结构不变子空间的存在性问题。得到了结构不变子空间是否存在可通过判定一组方程解的性质来解决。并且，方程组满足一定性质的每一组解均可确定一个结构不变子空间。因此，两通道分散扰动解耦可直接通过判定一组方程解的性质来解决。

接着，文章引进了相容不变性概念。用相容不变性概念研究三通道分散扰动解耦，得到了可分散扰动解耦的充要条件是存在具有相容不变性的结构不变子空间。

最后，文章从具有相容不变性的结构不变子空间应满足的条件出发，讨论结构不变子空间的存在性问题。得到了是否存在具有相容不变性的结构不变子空间可通过判定一组方程解的性质来解决。并且，方程组满足一定性质的每一组解均可确定一个具有相容不变性的结构不变子空间。因此，三通道分散扰动解耦可直接通过判定一组方程解的性质来解决。

目 录

主要记号

$n, m, n', \bar{n}, n_i, m_i, n'_i, \bar{n}_i, i = 0, 1, 2, \cdots$，均代表非负整数。

$\subset$	包含在
$\cap$	集合之交
$\oplus$	直和
A^{-1}	算子A之逆
$\mathrm{Im}A$	A的值域
$\mathrm{Ker}A$	A的核
$F\vert V$	算子F在子空间V的限制
$\dim(V)$	子空间V的维数
$\mathrm{Span}\{x_1, \cdots, x_n\}$	向量组$x_1, \cdots, x_n$张成的子空间

$\langle A|V\rangle = V + AV + \cdots + A^{n-1}V$

§1. 引　言

大系统理论自出现二十多年来，在建模理论，分散控制，递阶控制，优化设计和稳定性研究等众多领域里取得了可喜的进展，这些结果可散见于文献[1-7]等有关专著里。

1.1　什么是分散控制

七十年代初以来，大系统分散控制的研究越来越受到人们的重视。大系统的分散控制就是将一个大系统按其分布的许多子系统，分别采用独立的局部控制器来控制。每个控制器只观测局部的系统输出，并且控制局部的系统输入，而共同完成大系统所需要达到的整体目标。近十多年来，分散控制的研究主要沿两个方面进行。一个是分散系统控制的最优化问题的研究，另一个是关于分散控制系统各种性质的研究。

1.2　分散扰动解耦的研究情况和本文的内容

作为分散控制理论的一个分支——分散扰动解耦理论的研究这几年已逐步深入。分散扰动解耦的目的是设计局部反馈控制器使得扰动变量不影响整个系统的输出，或更一般些，就是使得扰动变量仅影响某一特定的子空间。文献[17-21]介绍了自1975年以来，在这方面的研究工作。不过，文献[24]，[25]已指出了这些工作的大部分结论是错的。关于集中系统的扰动解耦，W.M. Wonham和A.S. Morse[16]在1970年就作了研究。1975年，Hamano和Furuta[17]提出并解决了两通道分散系统的扰动解耦，他们的结论是对的。Hamano和Furuta在解决两通道分散扰动解耦问题时，利用了结构不变子空间的概念，但是以假设结构不变子空间存在为前提的，而

对结构不变子空间的存在性和具体求法没有进行讨论。到目前为止，结构不变子空间的存在性问题和它的具体求法仍没有解决。1982年，Cury、Guerhet 和 Moog[19] 在 Hamano 和 Furuta 两人工作的基础上提出了结构（A、B）不变子空间，对多通道分散系统的扰动解耦做了研究。但是，文献[24]已举例说明了 Cury 等三人的结论是不对的。1985年，Leite[20,21] 在 Hamano 和 Furuta 以及 Cury 等三人工作的基础上，发展了 K-(C_i, A, B_i) 不变子空间的概念，文献[20]中的引理1是 Leite 的主要结果，其它大部分结论是建立在引理1的基础上。但是，文献[25]已指出了 Leite 引理1、引理 A_1 和引理 A_2 的结论是错的。因此，多通道分散系统的解耦问题仍是值得研究。

本文的第一节为引言，简单介绍了分散扰动解耦的研究情况；第二节为预备知识，给出第三节和第四节要用到的一些基本引理；在第三节中，从两通道分散扰动解耦结构不变子空间应满足的条件出发，研究结构不变子空间的存在性问题，得到了是否存在结构不变子空间可通过判定一组方程解的性质来解决。并且，证明了方程组满足一定性质的每一组解均可确定一个结构不变子空间。这样不仅解决了结构不变子空间的求解问题，而且使得两通道分散扰动解耦可直接通过判定一组方程解的性质来解决；第四节研究三通道分散扰动解耦问题。首先，文章引进了子空间 V 相对于（A, B_i, Σ_i, $i\in\{1,2,3\}$）具有相容不变性的概念。用相容不变性的概念研究三通道分散扰动解耦问题，得到了可分散扰动解耦的充要条件是存在结构不变子空间 V，V 相对于（A, B_i, Σ_i, $i\in\{1,2,3\}$）具有相容不变性。接着，根据结构不变子空间 V 应满足的条件，讨论 V 的存在性问题。得到了是否存在具有相容不变性的结构不变子空间 V 可通过判定一组方程解的性质来解决。并且，方程组满足一定性质的每一组解均可确定一个结构不变子空间 V。因此，三通道分散扰动解耦可直接通过判定一组方程解的性质来解决；

文章的第五节是结束语，紧接着是参考文献和附录一、附录二，附录一给出了第二节一些基本引理的证明，而附录二则给出了第四节的定理 4.1 和定理 4.2 的证明。

§2. 预备知识

2.1 基本定义

假设 X, U, Y 为欧氏空间，$X\subset R^n$，$U\subset R^m$，$Y\subset R^\pi$，子空间 $V\subset X$，$X_i\subset X$，$i\in\{1,2,3\}$。定义如下投影：

$$P_i^{123}(V\cap(X_1+X_2+X_3))=\{x_i \mid x_i\in X_i,\ \text{存在}\ x_j\in X_j,\ x_k\in X_k,\ \text{使得}\ x_i+x_j+x_k\in V,\ j,k\in\{1,2,3\},\ j\neq k\neq i\},\ i\in\{1,2,3\} \tag{2.1}$$

$$P_i^{ij}(V\cap(X_i+X_j))=\{x_i \mid x_i\in X_i,\ \text{存在}\ x_j\in X_j,\ \text{使得}\ x_i+x_j\in V\},\ i,j\in\{1,2,3\},\ i\neq j \tag{2.2}$$

由于 V, X_1, X_2, X_3 均为子空间，则有 $P_i^{123}(V\cap(X_1+X_2+X_3))$，$P_i^{ij}(V\cap(X_i+X_j))$ 也为子空间，其中 $i,j\in\{1,2,3\}$，$i\neq j$。

注：如果 $X_1+X_2+X_3=X_1\oplus X_2\oplus X_3$，那么 (2.1), (2.2) 定义的投影即为自然投影。

假设 X_1^0, X_2^0, X_3^0 和 V_0 分别由 $X_1=X_1^0\oplus P_1^{123}(V\cap(X_1+X_2+X_3))$，$X_2=X_2^0\oplus P_2^{123}(V\cap(X_1+X_2+X_3))$，$X_3=X_3^0\oplus P_3^{123}(V\cap(X_1+X_2+X_3))$，$V=V_0\oplus V\cap(X_1+X_2+X_3)$ 所确定，则有：

$$V_0 \cap (X_1 + X_2 + X_3) = 0 \tag{2.3}$$

$$(X_1^0 + X_2^0 + X_3^0) \cap \left(\sum_{i=1}^{3} P_i^{123}(V \cap (X_1 + X_2 + X_3))\right) = 0 \tag{2.4}$$

(2.3)式显然成立，现证明(2.4)成立。如果不然，设存在 $x_i^0 \in X_i^0$，$\bar{x}_i \in P_i^{123}(V \cap (X_1 + X_2 + X_3))$，$i \in \{1, 2, 3\}$，使得 $\sum_{i=1}^{3}(x_i^0 + \bar{x}_i) = 0$，$x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 \neq 0$，则存在某一 $i_0 \in \{1,2,3\}$，$x_{i_0}^0 \neq 0$，因此有 $x_{i_0}^0 + \bar{x}_{i_0} \in P_{i_0}^{123}(V \cap (X_1 + X_2 + X_3))$，$x_i^0 \in P_{i_0}^{123}(V \cap (X_1 + X_2 + X_3))$，与 $x_{i_0}^0 \in X_{i_0}^0$ 矛盾。所以，$x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = 0$，即(2.4)成立。

2.2 基本引理

引理 2.1[22] 假设子空间 $V \subset X$，$A: X \to X$，$B: U \to X$，那么存在 $F: X \to U$；使得 $(A + BF)V \subset V$ 的充分必要条件为：

$$AV \subset V + \operatorname{Im} B \tag{2.5}$$

引理 2.2 如果 $F: X \to U$，$C: X \to Y$，且有 $\operatorname{Ker} F \supset \operatorname{Ker} C$，则存在 $H: Y \to U$，使得：

$$HC = F \tag{2.6}$$

证：设 $x_1, \cdots, x_{n_1}$ 为 $\operatorname{Ker} F$ 的一组基，扩张为整个空间 X 的一组 $x_1, \cdots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, \cdots, x_{n_2}$。其中 n_1，n_2 为非负整数，$n_2 \geqslant n_1$。

令：$HCx_i = 0$，$i = 1, \cdots, n_1$

$HCx_i = 0$，$i = n_1+1, \cdots, n_2$

则有 $HC=F$。

引理 2.3 假设 A、B 分别为 $n\times n$，$n\times m$ 矩阵，V_1, V_2 为子空间，$\bar{V}_1$，$\bar{V}_2$ 分别为 $n\times n_0$，$n\times \bar{n}_0$ 矩阵，满足：$V_1=I_m\bar{V}_1$，$V_2=I_m\bar{V}_2$，则有：

(1)、$AI_m\bar{V}_i=I_m(A\bar{V}_i)\quad i\in\{1,2\}$ (2.7)

(2)、$I_m(\bar{V}_1,\bar{V}_2)=I_m\bar{V}_1+I_m\bar{V}_2$ (2.8)

(3)、$AV_1\subset V_2+I_mB$ 的充分必要条件是存在 $\bar{n}_0\times n_0$ 矩阵 E_{12} 和 $m\times n_0$ 矩阵 E_B，使得：

$$A\bar{V}_1=\bar{V}_2E_{12}+BE_B \tag{2.9}$$

证：(1)，(2) 显然成立。

(3)、充分性：设存在 $\bar{n}_0\times n_0$ 矩阵 E_{12} 和 $m\times n_0$ 矩阵 E_B，使得：

$$A\bar{V}_1=\bar{V}_2E_{12}+BE_B$$

$$I_m(A\bar{V}_1)=I_m(\bar{V}_2,B)\begin{pmatrix}E_{12}\\E_B\end{pmatrix}$$

$$A(I_mV_1)\subset I_m(\bar{V}_2,B)$$

$$AV_1\subset V_2+I_mB$$

必要性：假设 $B=(b_1,\cdots,b_m)$，$\bar{V}_1=(v_1^1,\cdots,v_{n_0}^1)$，$\bar{V}_2=(v_1^2,\cdots,v_{\bar{n}_0}^2)$，则有 $I_mB=Span\{b_1,\cdots,b_m\}$，$V_1=I_m\bar{V}_1=Span\{v_1^1,\cdots,v_{n_0}^1\}$，$V_2=I_m\bar{V}_2=Span\{v_1^2,\cdots,v_{\bar{n}_0}^2\}$。

由 $AV_1\subset V_2+I_mB$，则有：

$$Av_j^1=\sum_{i=1}^{\bar{n}_0}e_{i,j}^1v_i^2+\sum_{i=1}^{m}e_{i,j}^2b_i\qquad j=1,\cdots,n_0 \tag{2.10}$$

令： $E_{12}=(e^1_{i,j})\quad i=1,\cdots,n_0;\ j=1,\cdots,n_0$

$E_B=(e^2_{i,j})\quad i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n_0$

则 (2.10) 变为：

$$A\bar{V}_1=\bar{V}_2E_{12}+BE_B$$

必要性得证。

引理 2.4 任意给定的 $i,j\in\{1,2,3\}$，$i\neq j$，假设 $\bar{X}^{ij}_i$ 由 $P^{ij}_i(V\cap(X_i+X_j))=V\cap X_i\oplus\bar{X}^{ij}_i$ 所确定，$x^i_1,\cdots,x^i_{n_3}$，$x^i_{n_3+1},\cdots,x^i_{n_4}$ 为 $\bar{X}^{ij}_i$ 的一组基，$x^j_l\in P^{ij}_j(V\cap(X_i+X_j))$，$l=1,\cdots,n_4$，满足 $x^i_l+x^j_l\in V$，$l=1,\cdots,n_4$。

令：$\bar{X}^1_i=Span\{x^i_1,\cdots,x^i_{n_3}\}$，$\bar{X}^2_i=Span\{x^i_{n_3+1},\cdots,x^i_{n_4}\}$，

$\bar{X}^1_j=Span\{x^j_1,\cdots,x^j_{n_3}\}$，$\bar{X}^2_j=Span\{x^j_{n_3+1},\cdots,x^j_{n_4}\}$，

其中 n_3,n_4 为非负整数 $n_4\geqslant n_3$，则有：

(1)、$x^j_1,\cdots,x^j_{n_3},x^j_{n_3+1},\cdots,x^j_{n_4}$ 线性无关。

(2)、$P^{ij}_j(V\cap(X_i+X_j))=V\cap X_j\oplus\bar{X}^1_j\oplus\bar{X}^2_j$

(3)、任意的 $x_i\in\bar{X}^l_i$（或 $x_j\in\bar{X}^l_j$），存在唯一的 $x_j\in\bar{X}^l_j$（或 $x_i\in\bar{X}^l_i$）使得 $x_i+x_j\in V$。且有 $dim(\bar{X}^l_i)=dim(\bar{X}^l_j)$，$l\in\{1,2\}$。

(4)、如果存在 $x^i_1\in\bar{X}^1_i$，$x^i_2\in\bar{X}^2_i$，$x^j_1\in\bar{X}^1_j$，$x^j_2\in\bar{X}^2_j$，使得 $x^i_1+x^j_1+x^i_2+x^j_2\in V$，则有 $x^i_1+x^j_1\in V$，$x^i_2+x^j_2\in V$。

证：(1)、如果 $x^j_1,\cdots,x^j_{n_4}$ 线性相关，则存在不全为 0 的实数 $a_1,\cdots,a_{n_4}$，使得 $\sum_{l=1}^{n_4}a_lx^j_l=0$。由于 $x^i_l+x^j_l\in V$，

则有 $\sum_{l=1}^{n_4} a_l(x_l^i+x_l^j)\in V$，$\sum_{l=1}^{n_4} a_l x_l^i\in V$，又 $\sum_{l=1}^{n_4} a_l x_l^i\in\bar{X}_i^{ij}$，因此有 $\sum_{l=1}^{n_4} a_l x_l^i=0$，与 $x_1^i,\dots,x_{n_4}^i$ 线性无关矛盾。所以，$x_1^j,\dots,x_{n_4}^j$ 线性无关。

(2). 由于 $x_1^j,\dots,x_{n_3}^j,x_{n_3+1}^j,\dots,x_{n_4}^j$ 线性无关，所以有 $\bar{X}_j^1+\bar{X}_j^2=\bar{X}_j^1\oplus\bar{X}_j^2$。i) 假设存在 $x_j\in V\cap X_j$，$\bar{x}_j\in\bar{X}_j^1\oplus\bar{X}_j^2$，使得 $x_j+\bar{x}_j=0$。对 $\bar{x}_j$，存在 $\bar{x}_i\in\bar{X}_i^{ij}$，使得 $\bar{x}_i+\bar{x}_j\in V$，则有 $\bar{x}_i=\bar{x}_i+\bar{x}_j+x_j\in V$，$\bar{x}_i=0$，$\bar{x}_j=0$，$x_j=0$。即有 $V\cap X_j\cap(\bar{X}_j^1\oplus\bar{X}_j^2)=0$。ii) 设 $x_j\in p_j^{ij}(V\cap(X_i+X_j))$，则存在 $x_i=\bar{x}_i+\tilde{x}_i$，其中 $\tilde{x}_i\in V\cap X_i$，$\bar{x}_i\in\bar{X}_i^{ij}$，使得 $x_i+x_j\in V$。对于 $\bar{x}_i$，存在 $\bar{x}_j\in\bar{X}_j^1\oplus\bar{X}_j^2$，使得 $\bar{x}_i+\bar{x}_j\in V$，则有 $x_j-\bar{x}_j+\tilde{x}_i\in V$，$x_j-\bar{x}_j\in V\cap X_j$，$x_j\in V\cap X_j\oplus\bar{X}_j^1\oplus\bar{X}_j^2$，即有 $p_j^{ij}(V\cap(X_i+X_j))=V\cap X_j\oplus\bar{X}_j^1\oplus\bar{X}_j^2$。

(3). 任意 $x_i\in\bar{X}_i^1$，假设存在 $x_j\in\bar{X}_j^1$，$\bar{x}_j\in\bar{X}_j^1$，使得 $x_i+x_j\in V$，$x_i+\bar{x}_j\in V$，则有 $x_j-\bar{x}_j\in V$。又 $x_j-\bar{x}_j\in\bar{X}_j^1$，所以，$x_j-\bar{x}_j=0$，$x_j=\bar{x}_j$。同理可证，任意的 $x_j\in\bar{X}_j^1$，存在唯一的 $x_i\in\bar{X}_i^1$，使得 $x_i+x_j\in V$。由于 $x_1^i,\dots,x_{n_3}^i$ 线性无关，$x_1^j,\dots,x_{n_3}^j$ 线性无关。所以，$dim(\bar{X}_i^1)=dim(\bar{X}_j^1)$。

同理可证，任意的 $x_i\in\bar{X}_i^2$（或 $x_j\in\bar{X}_j^2$），存在唯一的 $x_j\in\bar{X}_j^2$（或 $x_i\in\bar{X}_i^2$），使得 $x_i+x_j\in V$，且有：$dim(\bar{X}_i^2)=dim(\bar{X}_j^2)$。

(4)、如果存在 $x_1^i \in \bar{X}_i^1$，$x_1^j \in \bar{X}_j^1$，$x_2^i \in \bar{X}_i^2$，$x_2^j \in \bar{X}_j^2$，使得 $x_1^i + x_1^j + x_2^i + x_2^j \in V$。对于 x_1^i, x_2^i，分别存在 $\bar{x}_1^j \in \bar{X}_j^1$，$\bar{x}_2^j \in \bar{X}_j^2$，使得 $x_1^i + \bar{x}_1^j \in V$，$x_2^i + \bar{x}_2^j \in V$，则有 $x_1^j - \bar{x}_1^j + x_2^j - \bar{x}_2^j \in V$。又 $x_1^j - \bar{x}_1^j + x_2^j - \bar{x}_2^j \in \bar{X}_j^1 \oplus \bar{X}_j^2$ 和性质 (2)，所以，$x_1^j - \bar{x}_1^j + x_2^j - \bar{x}_2^j = 0$，$x_1^j = \bar{x}_1^j$，$x_2^j = \bar{x}_2^j$。即有：$x_1^i + x_1^j \in V$，$x_2^i + x_2^j \in V$。#

引理 2.5　任意的子空间 V，X_1，X_2，X_3，以及 (2.1)、(2.2) 定义的投影，存在子空间 X_i^{ij}，$X_i^{ij\cdot ik}$，X_i^{ik}，X_i^{123}，$i,j,k \in \{1,2,3\}$，$i \neq j \neq k$。使得：

(1) $P_i^{ij}(V \cap (X_i + X_j)) = V \cap X_i \oplus X_i^{ij} \oplus X_i^{ij\cdot ik}$

(2) $P_i^{123}(V \cap (X_1 + X_2 + X_3)) = V \cap X_i \oplus X_i^{ij} \oplus X_i^{ij\cdot ik} \oplus X_i^{ik} \oplus X_i^{123}$

(3) 任意的 $x_i \in X_i^{123}$，存在唯一的 $x_j \in X_j^{123}$，$x_k \in X_k^{123}$，使得 $x_i + x_j + x_k \in V$，且有 $dim(X_1^{123}) = dim(X_2^{123}) = dim(X_3^{123})$。

(4) 如果 $X_i^{123} \neq 0$，则任意的 $x_i \in X_i^{123}$，$x_j \in V \cap X_j \oplus X_j^{ij} \oplus X_j^{ij\cdot ik} \oplus X_j^{ik}$，$x_k \in P_k^{123}(V \cap (X_1 + X_2 + X_3))$，均有 $x_i + x_j + x_k \notin V$。

(5) 任意的 $x_i \in X_i^{ij}$，存在唯一的 $x_j \in X_j^{ij}$，使得 $x_i + x_j \in V$，且有 $dim(X_i^{ij}) = dim(X_j^{ij})$。

(6) 如果 $\mathfrak{X}_i^{ij} \neq 0$，则任意的 $x_i \in \mathfrak{X}_i^{ij}$，

$x_j \in V \cap \mathfrak{X}_j \oplus \mathfrak{X}_j^{ij \cdot jk} \oplus \mathfrak{X}_j^{jk} \oplus \mathfrak{X}_j^{123}$，$x_k \in P_k^{123}(V \cap (\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3))$，均有 $x_i + x_j + x_k \notin V$。

(7) 任意的 $x_i \in \mathfrak{X}_i^{ij \cdot ik}$，存在唯一的 $x_j \in \mathfrak{X}_j^{ij \cdot jk}$，$x_k \in \mathfrak{X}_k^{ik \cdot jk}$，使得 $x_i + x_j \in V$，$x_i + x_k \in V$，且有 $\dim(\mathfrak{X}_1^{12 \cdot 13}) = \dim(\mathfrak{X}_2^{12 \cdot 23}) = \dim(\mathfrak{X}_3^{13 \cdot 23})$。

(8) 如果 $\mathfrak{X}_i^{ij \cdot ik} \neq 0$，则任意的 $x_i \in \mathfrak{X}_i^{ij \cdot ik}$，

$x_j \in V \cap \mathfrak{X}_j \oplus \mathfrak{X}_j^{ij} \oplus \mathfrak{X}_j^{jk} \oplus \mathfrak{X}_j^{123}$，$x_k \in V \cap \mathfrak{X}_k \oplus \mathfrak{X}_k^{ik} \oplus \mathfrak{X}_k^{jk} \oplus \mathfrak{X}_k^{123}$，均有 $x_i + x_j \notin V$，$x_i + x_k \notin V$。

证明见附录一。

引理 2.6 由引理 2.5 确定的子空间 $\mathfrak{X}_1^{12 \cdot 13}$，$\mathfrak{X}_2^{12 \cdot 23}$，$\mathfrak{X}_3^{13 \cdot 23}$，存在子空间 $\hat{\mathfrak{X}}_i^{ij}$，$\hat{\mathfrak{X}}_i^{ik}$，$\hat{\mathfrak{X}}_i^{jk}$，$\hat{\mathfrak{X}}_i^{0}$，$i, j, k \in \{1, 2, 3\}$，$i \neq j \neq k$，满足：

(1) $\mathfrak{X}_i^{ij \cdot ik} = \hat{\mathfrak{X}}_i^{0} \oplus (\hat{\mathfrak{X}}_i^{ij} \oplus \hat{\mathfrak{X}}_i^{ik} \oplus \hat{\mathfrak{X}}_i^{jk})$

(2) 任意的 $x_i \in \hat{\mathfrak{X}}_i^{ij}$，存在唯一的 $x_j \in \hat{\mathfrak{X}}_j^{ij}$，$x_k \in \hat{\mathfrak{X}}_k^{ij}$，使得 $x_i + x_j \in V \cap \mathfrak{X}_1 + V \cap \mathfrak{X}_2 + V \cap \mathfrak{X}_3$，$x_i + x_k \in V$，且有 $\dim(\hat{\mathfrak{X}}_i^{ij}) = \dim(\hat{\mathfrak{X}}_j^{ij}) = \dim(\hat{\mathfrak{X}}_k^{ij})$。如果 $x_i \in \mathfrak{X}_i^{ij \cdot ik}$，存在 $x_j \in \mathfrak{X}_j^{ij \cdot jk}$，使得 $x_i + x_j \in V \cap \mathfrak{X}_1 + V \cap \mathfrak{X}_2 + V \cap \mathfrak{X}_3$，则有 $x_i \in \hat{\mathfrak{X}}_i^{ij}$。

(3) 任意的 $x_i \in \hat{\mathfrak{X}}_i^{0}$，存在唯一的 $x_j \in \hat{\mathfrak{X}}_j^{0}$，$x_k \in \hat{\mathfrak{X}}_k^{0}$，使得 $x_i + x_j \in V$，$x_i + x_j \notin V \cap \mathfrak{X}_1 + V \cap \mathfrak{X}_2 + V \cap \mathfrak{X}_3$，$x_i + x_k \in V$，

$x_i+x_k \notin V\cap \bar{X}_1+V\cap \bar{X}_2+V\cap \bar{X}_3$，且有 $dim(\hat{\bar{X}}_1^0)=dim(\hat{\bar{X}}_2^0)=dim(\hat{\bar{X}}_3^0)$

证明见附录一。

引理2.7　由引理2.6确定的 $\hat{\bar{X}}_i^{ij}$, $\hat{\bar{X}}_i^{ik}$, $\hat{\bar{X}}_i^{jk}$, $i,j,k\in\{1,2,3\}$, $i\neq j\neq k$，存在子空间 $\hat{\bar{X}}_i^{12.0}$, $\hat{\bar{X}}_i^{12.1}$, $\hat{\bar{X}}_i^{13.0}$, $\hat{\bar{X}}_i^{13.1}$, $\hat{\bar{X}}_i^{23.0}$, $\hat{\bar{X}}_i^{23.1}$, $\hat{\bar{X}}_i^{123}$, $i\in\{1,2,3\}$，使得：

(1)
$$\hat{\bar{X}}_i^{12}=\hat{\bar{X}}_i^{12.0}\oplus\hat{\bar{X}}_i^{12.1}\oplus\hat{\bar{X}}_i^{123}$$
$$\hat{\bar{X}}_i^{13}=\hat{\bar{X}}_i^{13.0}\oplus\hat{\bar{X}}_i^{13.1}\oplus\hat{\bar{X}}_i^{123}$$
$$\hat{\bar{X}}_i^{23}=\hat{\bar{X}}_i^{23.0}\oplus\hat{\bar{X}}_i^{23.1}\oplus\hat{\bar{X}}_i^{123}$$

(2)．$\hat{\bar{X}}_i^{ij}+\hat{\bar{X}}_i^{ik}+\hat{\bar{X}}_i^{jk}=\hat{\bar{X}}_i^{12.0}\oplus\hat{\bar{X}}_i^{13.0}\oplus(\hat{\bar{X}}_i^{12.1}\oplus\hat{\bar{X}}_i^{13.1})\cap\hat{\bar{X}}_i^{23.1}\oplus\hat{\bar{X}}_i^{23.0}\oplus\hat{\bar{X}}_i^{123}$

(3)．任意的 $x_i\in\hat{\bar{X}}_i^{123}$，存在唯一的 $x_j\in\hat{\bar{X}}_j^{123}$, $x_k\in\hat{\bar{X}}_k^{123}$，使得 $x_i+x_j\in V\cap\bar{X}_1+V\cap\bar{X}_2+V\cap\bar{X}_3$，$x_i+x_k\in V\cap\bar{X}_1+V\cap\bar{X}_2+V\cap\bar{X}_3$，且有 $dim(\hat{\bar{X}}_1^{123})=dim(\hat{\bar{X}}_2^{123})=dim(\hat{\bar{X}}_3^{123})$。

(4)　任意的 $x_1\in\hat{\bar{X}}_1^{12.\ell}$，存在唯一的 $x_2\in\hat{\bar{X}}_2^{12.\ell}$, $x_3\in\hat{\bar{X}}_3^{12.\ell}$，使得 $x_1+x_2\in V\cap\bar{X}_1+V\cap\bar{X}_2+V\cap\bar{X}_3$，$x_1+x_3\in V$, $x_1+x_3\notin V\cap\bar{X}_1+V\cap\bar{X}_2+V\cap\bar{X}_3$，且有 $dim(\hat{\bar{X}}_1^{12.\ell})=dim(\hat{\bar{X}}_2^{12.\ell})=dim(\hat{\bar{X}}_3^{12.\ell})$，$\ell\in\{0,1\}$。

(5)　任意的 $x_1\in\hat{\bar{X}}_1^{13.\ell}$，存在唯一的 $x_2\in\hat{\bar{X}}_2^{13.\ell}$, $x_3\in\hat{\bar{X}}_3^{13.\ell}$，使得 $x_1+x_2\in V$, $x_1+x_2\notin V\cap\bar{X}_1+V\cap\bar{X}_2+V\cap\bar{X}_3$，$x_1+x_3\in V\cap\bar{X}_1+V\cap\bar{X}_2+V\cap\bar{X}_3$，且有 $dim(\hat{\bar{X}}_1^{13.\ell})=dim(\hat{\bar{X}}_2^{13.\ell})=dim(\hat{\bar{X}}_3^{13.\ell})$，$\ell\in\{0,1\}$。

(6) 任意的 $x_2\in\hat{X}_2^{23\cdot\ell}$，存在唯一的 $x_1\in\hat{X}_1^{23\cdot\ell}$，$x_3\in\hat{X}_3^{23\cdot\ell}$，使得 $x_1+x_2\in V$，$x_1+x_2\notin V\cap X_1+V\cap X_2+V\cap X_3$，$x_2+x_3\in V\cap X_1+V\cap X_2+V\cap X_3$，且有 $dim(\hat{X}_1^{23\cdot\ell})=dim(\hat{X}_2^{23\cdot\ell})=dim(\hat{X}_3^{23\cdot\ell})$，$\ell\in\{0,1\}$。

(7) 任意的 $x_i^{12\cdot1}\in\hat{X}_i^{12\cdot1}$（或 $x_i^{13\cdot1}\in\hat{X}_i^{13\cdot1}$），存在唯一的 $x_i^{13\cdot1}\in\hat{X}_i^{13\cdot1}$（或 $x_i^{12\cdot1}\in\hat{X}_i^{12\cdot1}$），使得 $x_i^{12\cdot1}+x_i^{13\cdot1}\in\hat{X}_i^{23\cdot1}$，且任意的 $x_i^{23\cdot1}\in\hat{X}_i^{23\cdot1}$，有 $x_i^{23\cdot1}\in\hat{X}_i^{12\cdot1}+\hat{X}_i^{13\cdot1}$，$dim(\hat{X}_i^{12\cdot1})=dim(\hat{X}_i^{13\cdot1})=dim(\hat{X}_i^{23\cdot1})$，$i\in\{1,2,3\}$。

证明见附录一。

引理 2.8 由引理 2.5 确定的 $X_1^{12\cdot13}$，$X_2^{12\cdot23}$，$X_3^{13\cdot23}$，X_1^{12}，X_2^{12}，存在子空间 $\tilde{X}_1^{12}$，$\tilde{X}_2^{12}$，$\tilde{X}_1^{21}$，$\tilde{X}_2^{21}$，满足：

(1) $X_i^{12}=\tilde{X}_i^{12}\oplus\tilde{X}_i^{21}$　$i\in\{1,2\}$

(2)，任意的 $x_i\in\tilde{X}_i^{21}$，存在唯一的 $x_j\in\tilde{X}_j^{21}$，使得 $x_i+x_j\in V\cap X_1+V\cap X_2+V\cap X_3+V\cap(X_1^{12\cdot13}+X_2^{12\cdot23}+X_3^{13\cdot23})$，$i,j\in\{1,2\}$，$i\neq j$，且有 $dim(\tilde{X}_1^{21})=dim(\tilde{X}_2^{21})$。

(3) 任意的 $\tilde{x}_i^{12}$，存在唯一的 $x_j\in\tilde{X}_j^{12}$，使得 $x_i+x_j\in V$，$x_i+x_j\notin\sum_{k=1}^{3}V\cap X_k+V\cap(X_1^{12\cdot13}+X_2^{12\cdot23}+X_3^{13\cdot23})$，$i,j\in\{1,2\}$，$i\neq j$，且有 $dim(\tilde{X}_1^{12})=dim(\tilde{X}_2^{12})$。

(4)．$(\tilde{X}_1^{12}+\tilde{X}_2^{12})\cap(\sum_{i=1}^{3}V\cap X_i+X_1^{12\cdot13}+X_2^{12\cdot23}+X_3^{13\cdot23}+\tilde{X}_1^{21}+\tilde{X}_2^{21})=0$

证明见附录一。

引理2.9 由引理2.5确定的子空间$\mathfrak{X}_1^{12,13}$，$\mathfrak{X}_2^{12,23}$，$\mathfrak{X}_3^{13,23}$，$\mathfrak{X}_1^{12}$，$\mathfrak{X}_2^{12}$，$\mathfrak{X}_1^{13}$，$\mathfrak{X}_3^{13}$，存在子空间$\widetilde{\mathfrak{X}}_1^{13}$，$\widetilde{\mathfrak{X}}_3^{13}$，$\widetilde{\mathfrak{X}}_1^{31}$，$\widetilde{\mathfrak{X}}_3^{31}$，满足：

(1). $\mathfrak{X}_i^{13}=\widetilde{\mathfrak{X}}_i^{13}\oplus\widetilde{\mathfrak{X}}_i^{31}\quad i\in\{1,3\}$

(2). 任意的$x_i\in\widetilde{\mathfrak{X}}_i^{31}$，存在唯一的$x_j\in\widetilde{\mathfrak{X}}_j^{31}$，使得$x_i+x_j\in\sum_{k=1}^{3}V\cap\mathfrak{X}_k+V\cap(\mathfrak{X}_1^{12,13}+\mathfrak{X}_2^{12,23}+\mathfrak{X}_3^{13,23})+V\cap(\mathfrak{X}_1^{12}+\mathfrak{X}_2^{12})$，$i,j\in\{1,3\}$，$i\neq j$，且有$dim(\widetilde{\mathfrak{X}}_1^{31})=dim(\widetilde{\mathfrak{X}}_3^{31})$。

(3). 任意的$x_i\in\widetilde{\mathfrak{X}}_i^{13}$，存在唯一的$x_j\in\widetilde{\mathfrak{X}}_j^{13}$，使得$x_i+x_j\in V$，$x_i+x_j\notin\sum_{k=1}^{3}V\cap\mathfrak{X}_k+V\cap(\mathfrak{X}_1^{12,13}+\mathfrak{X}_2^{12,23}+\mathfrak{X}_3^{13,23})+V\cap(\mathfrak{X}_1^{12}+\mathfrak{X}_2^{12})$，$i,j\in\{1,3\}$，$i\neq j$，且有$dim(\widetilde{\mathfrak{X}}_1^{13})=dim(\widetilde{\mathfrak{X}}_3^{13})$。

(4). $(\widetilde{\mathfrak{X}}_1^{13}+\widetilde{\mathfrak{X}}_3^{13})\cap(\sum_{i=1}^{3}V\cap\mathfrak{X}_i+\mathfrak{X}_1^{12,13}+\mathfrak{X}_2^{12,23}+\mathfrak{X}_3^{13,23}+\mathfrak{X}_1^{12}+\mathfrak{X}_2^{12}+\widetilde{\mathfrak{X}}_1^{31}+\widetilde{\mathfrak{X}}_3^{31})=0$

证明见附录一。

引理2.10 由引理2.5确定的子空间$\mathfrak{X}_i^{ij,ik}$，$\mathfrak{X}_i^{ij}$，$\mathfrak{X}_i^{ik}$，$i,j,k\in\{1,2,3\}$，$i\neq j\neq k$，存在子空间$\widetilde{\mathfrak{X}}_2^{23}$，$\widetilde{\mathfrak{X}}_3^{23}$，$\widetilde{\mathfrak{X}}_2^{32}$，$\widetilde{\mathfrak{X}}_2^{32}$，满足：

(1). $\mathfrak{X}_i^{23}=\widetilde{\mathfrak{X}}_i^{23}\oplus\widetilde{\mathfrak{X}}_i^{32}\quad i\in\{2,3\}$

(2). 任意的$x_i\in\widetilde{\mathfrak{X}}_i^{32}$，存在唯一的$x_j\in\widetilde{\mathfrak{X}}_j^{32}$，使得$x_i+x_j\in\sum_{k=1}^{3}V\cap\mathfrak{X}_k+V\cap(\mathfrak{X}_1^{12,13}+\mathfrak{X}_2^{12,23}+\mathfrak{X}_3^{13,23})+V\cap(\mathfrak{X}_1^{12}+\mathfrak{X}_2^{12})+V\cap(\mathfrak{X}_1^{13}+\mathfrak{X}_3^{13})$，$i,j\in\{2,3\}$，$i\neq j$。且有$dim(\widetilde{\mathfrak{X}}_2^{32})=dim(\widetilde{\mathfrak{X}}_3^{32})$。

(3). 任意的$x_i\in\widetilde{\mathfrak{X}}_i^{23}$，存在唯一的$x_j\in\widetilde{\mathfrak{X}}_j^{23}$，使得