厦门大学硕士研究生毕业论文

关于随机控制系统的方差能控性

系（所、室）：计算机与系统科学

专　　　业：运筹学与控制论

研 究 方 向：滤波与随机控制

研究生姓名：肖　恒

指 导 教 师：李文清教授

一九八七年八月

§0：数学符号

x, y, u, w	，矢量
A, β, W, σ，	矩阵
A^{-1}, L^{-1}	A阵、L阵的逆阵
A^T	A阵的转置
$\mathbb{R}^n$	n维欧几里德空间
$\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^n或L_r^2}$	在$\mathbb{R}^n$（或L_r^2）空间中的内积
T^*	算子T的伴随算子：$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ 当T是阵时，T^*就是T取共轭复数再转置
$\lvert a\rvert$	a的绝对值
tr	迹
$\lVert\cdot\rVert$	范数
$\in$	属于
$\subset$	包含
$dx(t)$	$x(t)$的微分
$\mathbb{R}^{n\times n}$	$n\times n$ 阵所张成的欧氏空间

目 录

关于随机控制系统的方差能控性

§1：引言

我们考虑系统：

$$\begin{cases} dx(t)=A(t)x(t)dt+B(t)u(t)dt+\sigma(t)dw(t) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases} \quad \text{------} \quad (1)$$

按 Y.Sunahara[1] 的随机可控性的定义：系统初值 x_0 是以概率 $1-\varepsilon$ 随机能控的，如果存在一个控制 $u(t,x)$，使得对任意的 $\varepsilon(t_f)$ 和 δ，有

$$P_r\{\|x(t_f)\|^2\geq\delta \mid x(t_0)=x_0\}\leq\varepsilon(t_f) \quad \text{-----} \quad (2)$$

然而：鉴于下面几个方面的原因，我们有必要考虑系统(1)的方差能控性。(i)：从(2)式可看出，这样的能控性对系统状态 $x(t)$（随机）的要求比较高。如：知道其分布密度或分布。而许多实际情况，我们只知道一些系统量：如：均值，方差，协方差等。(ii) 如果系统(1)的初值 $x(t_0)=x_0$ 是服从正态分布的，那么利用随机微分方程的知识知：在 $w(t)$ 是 Brown motion 时，$x(t)$ 也是一个正态分布，此时的 $x(t)$ 完全由均值和方差所决定，在这种情况下，均值和方差的能控性，再利用 Markov 不等式，会导致 $x(t)$ 的能控性。从而对 Sunahara 所提出的能控性给出一个初步的注释，使其想法得以实现。(iii) Sanahara 所研究的是轨线终值的随机控制。其中 $\|x(t_f)\|^2\geq\delta$

$\|x(t_f)\|^2 = x_1^2(t_f) + \cdots + x_n^2(t_f)$ 是相应于矩阵 $[x_i(t_f)x_j(t_f)]_{n\times n}$ 的迹，故研究方差阵 $E[x_i(t)x_j(t)]_{n\times n} = E(x(t)x^T(t))$ 的能控性更具有一般性。

另一方面，确定性的情形：

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

则：
$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)B(s)u(s)ds$$

当 t_f 确定时，$x(t_f)$ 也就确定了，这时 $x(t_f)$ 代表一点的位置，又如 $\dot{x}(t)$ 表示速度，而这些都是一些"个体另"。

然而，在一些国外的随机控制的教科书中所讨论的随机控制。多为性能指标下的最优控制，其提法为：

(Stochastic System , Terrance P. MeGarty)

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + m(t) + \omega(t)$$

$$z(t) = c(t)x(t) + v(t)$$

其中 $m(t)$ 为控制，选 $m(t)$ 使：

$$J(m) = E\left(\int_0^T L(t, m(t), x(t))dt\right)$$

达到最优（即极小值或极大值）

这些提法和确定性的提法不太一致。确定性控制是指选取控制另，使 $x(t)$ 在时刻 T 达到指定的位置或所谓可达集的几何

性质是什么。在随机控制中，每一$x(t)$表示n维空间的一点，但同时又是一随机矢量的元，确切地说是$x(t,\omega)$，$\omega\in(\Omega,\mathcal{F},P)$概率空间的一元，故不能简单地寻找样本函数某一时刻的位置。再者，如我们进行一个地区的天气预报，我们需要知道，也只需要知道其平均温度（即视为：温度的均值），单个知道某一点的具体温度是不能解决问题的。同样，对温度、气压等测量也有类似的问题。而这些系统量又可分为：确定性的（如：一个均匀水管内水的流速，就是恒定的）与随机的（如：天气预报）。我们要探讨对随机的系统量：如期望、矩量、协方差等。这些系统量的探讨，它们才能反映随机控制系统的本质问题。为此：下面对期望、方差能控性提出一些初步的论述。

§2：定常有限维系统的方差能控性

考虑：完备概率空间（Ω，$\mathcal{F}$，P）

系统：
$$\begin{cases} dx(t)=Ax(t)dt+Bu(t)dt+\sigma dw(t) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases} \quad \text{------(3)}$$

定义1：系统均值$Ex(t)$在区间$[t_0,t_1]\subset[t_0,T]$上是完全能控的，即对于$\forall$初值x_0，存在随机控制$u(t)\in\mathcal{U}$（容许控制集），使得：$Ex(t_1)=0$

定义2：系统方差$Ex(t)x^T(t)$在区间$[t_0,t_1]\subset[t_0,T]$上是完全能控的，即对于$\forall$对称矩阵$[a_{ij}]_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，和$\forall$初值$x_0$，存在随机控制$u(t)\in\mathcal{U}$，有：

$$[a_{ij}]_{n\times n}=E(x(t)x^T(t_1)) \text{ 成立}$$

注：在定义均值随机能控性时，可用$Ex(t_1)=C_1$（常数矢量，但取$C_1=0$，不失一般性。在定义方差能控性时，应考虑$E(x(t)-Ex(t_1))(x(t_1)-Ex(t_1))^T$，但为了计算上方便起见，我们只考虑$E(x(t_1)x^T(t_1))$，即假定$Ex(t_1)=0$。

定义3[10]：一个随机过程$\xi(t,x(t,\omega))$是Borel可测的，是指：$\xi:[t_0,T]\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$的Borel可测的，当t固定时，$\xi(t,x(t,\omega))$是在概率空间（$\Omega$，$\mathcal{F}$，$P$）上的$n$维随机矢量。

注：本文限于考虑服从正态分布的随机矢量。

以下我们考虑一般的随机微分方程所表示的随机系统：

$$\begin{cases} dx(t)=f(t,x(t),u(t,x))dt+\sigma(t,x(t),u(t,x))dw(t) & t\geq s \\ x(s)=x_0 \end{cases}$$

式中 $u(t,x)$ 是服从正态分布的Borel 可测随机过程。为了计算上的方便，以下多考虑对t连续的随机过程 $u(t,x(t,\omega))$

我们称所有具有这样性质的 $u(t,x)$，为容许控制。

$$\mathcal{U} \triangleq \{\text{所有容许控制}\}$$

以下先由较简单的线性定常随机系统进行讨论：

$$\text{系统：}\begin{cases} dx(t)=Ax(t)dt+Bu(t)dt+\sigma d\omega(t) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases} \quad \cdots (3)$$

假定：$x(t)\in\mathbb{R}^n$，$t\in[t_0,T]$，$x_0\in\mathbb{R}^n$，且x_0是$\mathcal{F}_0$可测的，$\mathcal{F}_0$为对每一$t\in[t_0,T]$，$\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}$中，所有P——零测集全体。$x_0$服从正态分布，且$Ex_0=\bar{x}_0$，$Ex_0x_0^T=P_0$。A是$n\times n$的矩阵，B是$n\times r$的矩阵，$u(t)$是$r\times 1$的控制向量。$u(t)\in\mathcal{U}$（容许控制）。$\omega(t)$是$\mathcal{F}_t$可测的Wiener过程，且$Ed\omega(t)=0$，$Ed\omega(t)d\omega^T(t)=W(t)dt$，$\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}$（对于$s<t$），$\{\mathcal{F}_t\}$表示这递增的$\sigma$—域族。同时还假定：$Ex_0d\omega^T(t)=0$，$EBu(t)d\omega^T(t)=0$，那么：由A、B、$\sigma$是常矩阵，就保证了系统(3)的解存在：从而有：

$$x(t)=e^{At}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}Bu(s)ds+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}\sigma d\omega(s)$$

定理1：系统(3)的方差$Ex(t)x^T(t)$在任意区间$[t_0,t_1]\subset[t_0,T]$上完全能控的充要条件是：存在T_{t_1}，其表示式为

$$T_{t_1}u=\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds$$ 是不降秩的，即$T_{t_1}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}^n$

上满射的，$t_1\in[t_0,T]$。其中$u(t)\in\mathcal{U}$。

证：分为两部分证明：

第一部分证明：系统方差 $Ex(t)x^T(t)$ 在 $(t_0, t_1]\subset[t_0,T]$ 上完全能控的充要条件是：T_{t_1} 不降秩。

第二部分证明：系统(3)方差 $E[x(t)x^T(t)]$ 在 $(t_0,t_1]\subset(t_0,T]$ 上完全能控，等价于在任意区间 $(t_\alpha,t_\beta]\subset(t_0,T]$ 上完全能控。

证：第一部分充分充性证明：

由于 $x(t_1)=e^{At_1}x_0+\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds+\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\sigma dw(s)$

从而有：$Ex(t_1)x^T(t_1)=e^{At_1}P_0e^{A^Tt_1}+Ee^{At_1}x_0\cdot(\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds)^T+$

$+E\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds\cdot(e^{At_1}x_0)^T+E\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds(\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds)^T$

$+\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\sigma W(s)\sigma^Te^{A^T(t_1-s)}ds$

$=e^{A(t_1)}P_0e^{A^Tt_1}+e^{At_1}\int_{t_0}^{t_1}Ex_0u^T(s)B^Te^{A^T(t_1-s)}ds$ +

$+\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}BEu(s)x_0^Tds\cdot e^{A^Tt_1}+\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\sigma W(s)\sigma^Te^{A^T(t_1-s)}ds$ +

$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}BEu(s)u^T(\tau)B^Te^{A^T(t_1-\tau)}dsd\tau$. ----(4)

分三种情况：

取 $u(s)=B^Te^{A^T(t_1-s)}y$，$y\in R^n$ 的 r.v. 具有正态分布，$Ey=0$

(i) 若 x_0 与 y 独立：

那么从(4)式得：

$$E[x(t_1)x^T(t_1)]=e^{At_1}P_0e^{A^Tt_1}+\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\sigma W(s)\sigma^Te^{A^T(t_1-s)}ds+$$

$$+L_{[t_0,t_1]}Eyy^TL_{[t_0,t_1]}$$

其中$L_{[t_0,t_1]}\triangleq\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\beta\beta^Te^{A^T(t_1-s)}ds$， 由于$T_{t_1}$不降秩，从而

$L_{[t_0,t_1]}$是可逆的，（参见[1]），即$L_{[t_0,t_1]}^{-1}$存在。从而对于任意

对称阵$[a_{ij}]_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，只要取控制：

$u(s)=\beta^Te^{A^T(t_1-s)}y$，其中$y$满足$Eyy^T=L_{[t_0,t_1]}^{-1}[[a_{ij}]-e^{At_1}P_0e^{A^Tt_1}$

$-\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\sigma W(s)\sigma^Te^{A^T(t_1-s)}ds]L_{[t_0,t_1]}^{-1}$，$Ey=0$，

就有：$Ex(t_1)x^T(t_1)=(a_{ij}]_{n\times n}$，即和此时系统方差$Ex(t)x^T(t)$在

$[t_0,t_1]$上完全能控。

(ii) 若x_0与y不独立。

且$u(s)=\beta^Te^{A^T(t_1-s)}y$时，那么(4)式有：

$$Ex(t_1)x^T(t_1)=e^{At_1}P_0e^{A^Tt_1}+\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\sigma W(s)\sigma^Te^{A^T(t_1-s)}ds$$

$$+e^{A(t_1)}Ex_0y^T\cdot L_{[t_0,t_1]}+L_{[t_0,t_1]}Eyx_0^T\cdot e^{A^Tt_1}+$$

$$+L_{[t_0,t_1]}Eyy^TL_{[t_0,t_1]}$$

令$C_1\triangleq Ex(t_1)x^T(t_1)-e^{At_1}P_0e^{A^Tt_1}-\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\sigma W(s)\sigma e^{A^T(t_1-s)}ds$

由$Ex(t_1)x^T(t_1)$的对称性，推得$C_1=C_1^T$，

$$X \triangleq e^{At_1}Ex_0y^T \Longrightarrow X^T = Eyx_0\cdot e^{A^Tt_1}$$

，同时令：

$K\triangleq L_{[t_0,t_1]} \Longrightarrow K=K^T$ 代入上式得：矩阵Riccati 方程：

$$XK+KX^T+KEyy^TK=C_1$$

从而：对任意的对称阵$[a_{ij}]_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，取控制$u(s)=B^Te^{A^T(t_1-s)}y$，其中$y$满足矩阵Riccati 方程：

$$XK+KX^T+K\cdot Eyy^T\cdot K=C_1^* \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

其中：$C_1^*=[a_{ij}]_{n\times n}-e^{At_1}P_0e^{A^Tt_1}-\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\sigma W(s)\sigma^Te^{A^T(t_1-s)}ds$

就有：$E[x(t_1)x^T(t_1)]=[a_{ij}]$，即知此系统方差$E(x(t)x^T(t))$在$[t_0,t_1]$上是完全能控的。然而，解矩阵Riccati 方程(5)，来得出$Eyy^T=?$，有一定的困难，因它是K，$X=e^{At_1}Ex_0y^T$的函数，所以此时控制实施起来，就会带来许多不便。另一方面：方程(5)并非任何情况都有解：我们知道对矩阵Riccati方程有定理[8]：

$$\dot K(s)=-A^T(s)K(s)-K(s)A(s)+K(s)B(s)N^{-1}(s)B^T(s)K(s)-M(s)$$

矩阵$M(s)$和D是非负定的，$N(s)$是正定的，那么矩阵Riccati在条件$K(t_1)=D$下，在$(-\infty,t_1)$有一解。

那么(5)是其的一种特殊情况$\dot K(s)=0$，$B(s)=I$，$N^{-1}(s)=Eyy^T$，$X=-A(s)$，$M(s)=C_1^*$。但此时，我们无法保证C_1^*是非负定的，为了避免这些问题，我们考虑：

(iii)：若x_0与y不独立，我们取控制为：

$u(s)=\beta^T e^{A^T(t_1-s)}(y-Cx_0)$，其中：$C=L^{-1}_{[t_0,t_1]}e^{At_1}$

代入公式(5)得：

$$Ex(t_1)x^T(t_1)=e^{At_1}P_0e^{A^Tt_1}+\left(\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\beta\beta^Te^{A^T(t_1-s)}ds\right)\cdot[Eyx_0^T-CP_0]e^{A^Tt_1}+$$

$$+e^{At_1}(Ex_0y^T-P_0C^T)L_{[t_0,t_1]}+\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\sigma W(s)\sigma^Te^{A^T(t_1-s)}ds+L_{[t_0,t_1]}Eyy^TL_{[t_0,t_1]}$$

$$-L_{[t_0,t_1]}Eyx_0^Te^{A^Tt_1}-e^{At_1}Ex_0y^T\cdot L_{[t_0,t_1]}+e^{At_1}P_0e^{A^Tt_1}$$

$$\Longrightarrow Ex(t_1)x^T(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\sigma W(s)\sigma^Te^{A^T(t_1-s)}ds+L_{[t_0,t_1]}Eyy^TL_{[t_0,t_1]}. \quad (6)$$

从而对于$\forall$对称矩阵$[a_{ij}]_{n\times n}\in R^{n\times n}$，只要取控制：

$u(s)=\beta^Te^{A^T(t_1-s)}(y-Cx_0)$，其中$C=L^{-1}_{[t_0,t_1]}e^{At_1}$，$y$满足：

$$Eyy^T=L^{-1}_{[t_0,t_1]}\left([a_{ij}]-\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\sigma W(s)\sigma^Te^{A^T(t_1-s)}ds\right)L^{-1}_{[t_0,t_1]}$$

代入(6)式，就有：$Ex(t_1)x^T(t_1)=[a_{ij}]_{n\times n}$成立。

即知系统方差$Ex(t)x^T(t)$在区间$[t_0,t_1]$上完全能控。

充分性证毕

---

*注：这种随机控制$u(s)$的取法是非常人为的，由于容许控制函数的限制那么宽，这种取法是可行的，在这点上，应用数学与纯数学的理论是不同的。

第一部分必要性证明：

由假设：系统(3)的方差在区间$[t_0,t_1]$上是完全能控的，即$\forall [a_{ij}]_{n\times n}\in \mathbb{R}^{n\times n}$，存在$t_1$和$u(s)\in\mathcal{U}$，使得：

对任意的初值x_0，有：$Ex(t_1)x^T(t_1)=[a_{ij}]_{n\times n}$.

若$T_{t_1}u=\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds$不能满全空间$\mathbb{R}^n$，那么：由$x_0$的任意性，我们可特取$x_0=0$，从而有：

$$
\begin{aligned}
[a_{ij}]_{n\times n}&=e^{At_1}P_0e^{A^Tt_1}+Ee^{At_1}x_0\left(\int_{t_0}e^{A(t-s)}Bu(s)ds\right)^T\\
&+E\left(\int_{t_0}e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds\right)\left(e^{At_1}x_0\right)^T+E\left(\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds\right)\left(\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds\right)^T+\\
&+\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\sigma W(s)\sigma^Te^{A^T(t_1-s)}ds=E\left(\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t-s)}Bu(s)ds\right)\left(\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds\right)^T\\
&+\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\sigma W(s)\sigma^Te^{AT(t_1-s)}ds
\end{aligned}
$$

再令：$[a_{ij}]_{n\times n}=[A_{ij}]_{n\times n}+\int_{t_0}e^{A(t_1-s)}\sigma^Te^{A^T(t_1-s)}ds$，那么由于$[a_{ij}]_{n\times n}$的任意性，知：$[A_{ij}]_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$也是任意的。(因：$\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\sigma W(s)\sigma^Te^{A^T(t_1-s)}ds$是由系统完全决定的常阵)，即知：

$$[A_{ij}]_{n\times n}=E\left(\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds\right)\left(\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds\right)^T$$

因$\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-s)}BU(s)ds = T_{t_1}u$ 不张满全空间$\mathbb{R}^n$，推得上式右边

$E(\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds)(\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds)^T$ 不张满全空间$\mathbb{R}^{n\times n}$

（请参见附录〔5〕），从而与左边$[A_{ij}]_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$的任意性产生矛盾，由此得：

$$T_{t_1}u=\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-s)}BU(s)ds$$ 张满全空间$\mathbb{R}^n$，即T_{t_1}是不降秩的。

第一部分必要性证毕。

第二部分：我们要证：系统(3)的方差$EX(t)X^T(t)$在区间$[t_0,t_1]$上完全能控，等价于在$\forall$区间$[t_\alpha,t_\beta]\subset[t_0,T]$上完全能控性。

首先我们有下面性质：

性质：系统(3)方差$E(X(t)X^T(t))$在$[t_0,t_1]$上完全能控的充分必要条件是阵$K(t)=e^{A(t_1-t)}B$的行线性独立，即对任一非0的n维矢量a，有$a^TK(t)\neq 0$，$t\in[t_0,t_1]$

（注：此处"T"表示转置）

证：充分性

设$K(t)$的行线性独立，反证：设系统(3)方差在$[t_0,t_1]$上不完全能控，依定理1第一部分证明知T_{t_1}是降秩的。所以存在非零的随机矢量a，对一切$u\in L_r^2[t_0,t_1]$，有：

$$\langle u, T_{t_1}^* a\rangle_{L^2} = \langle T_{t_1}u, a\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$$

所以$T_{t_1}^* a = 0 \Longrightarrow B^T e^{A^T(t_1-t)} a \equiv 0$，$t\in[t_0,t_1]$

$\Longrightarrow a^T e^{A(t_1-t)} B \equiv 0$，$t\in[t_0,t_1]$，即$K(t)\equiv e^{A(t_1-t)}B$的行线

性相关，得出矛盾，因此系统（3）的方差在$[t_0,t_1]$上完全能控。

必要性：

设系统（3）的方差在$[t_0,t_1]$上完全能控，依第一部分的结论知：T_{t_1}不降秩，反设存在$\alpha\neq 0$，使得：$\alpha^T e^{A(t_1-t)}\beta\equiv 0$，$t\in[t_0,t_1]$，则对$u\in\mathcal{U}$，有$\alpha^T T_{t_1}u=0$，这与$T_{t_1}$满秩相矛盾，所以$K(t)$的行在$[t_0,t_1]$上线性独立。

证毕

有了上面这个性质，即系统（3）方差在$[t_0,t_1]$上完全能控的充分必要条件是阵$e^{A(t_1-t)}\beta$的行线性独立，$t\in[t_0,t_1]$，也就是阵$e^{At}\beta$的行线性独立，$t\in[0,t_1-t_0]$

同理，系统方差在任一区间$[t_\alpha,t_\beta]$上完全能控的充分必要条件是阵$e^{At}\beta$的行在区间$[0,t_\beta-t_\alpha]$上线性独立。因此只要证明阵$e^{tA}\beta$的行在任一区间$[t_1,t_2]$上线性独立等价于在$(-N,N)$上线性无关（N为任意大的正整数）。那么我们就证明了系统（3）的方差在区间$[t_0,t_1]$上完全能控，等价于在任一区间$[t_\alpha,t_\beta]$上完全能控。

首先阵$e^{At}\beta$的行在有穷区间上线性无关，当然更在无穷区间$(-\infty,\infty)$上线性无关。

反之，设$e^{At}\beta$的行在$(-\infty,\infty)$上线性无关，要证它们在任一有穷区间上也线性无关。反证：设$e^{At}\beta$的行在某一区间$[t_1,t_2]$上线性相关。即存在n维向量$\alpha\neq 0$，使$\alpha^T e^{At}\beta\equiv 0$ $t\in[t_1,t_2]$，把t看成复平面上的变量，容易看出阵e^{At}的元是全函数（参见[4]，第五章§3），所以$\alpha^T e^{At}\beta$的元也是全函数，全函数在某一区间上为0，则在全复平面上为0[5]，所以$\alpha^T e^{At}\beta\equiv 0$，$t\in(-N,N)$，这和$e^{At}\beta$的行在$(-N,N)$

上线性无关产生矛盾，所以 $e^{At}\beta$ 的行在任一区间上线性独立。

定理1证毕

定理2：系统均值 $Ex(t)$ 在任一区间 $[t_\alpha, t_\beta]\subset[t_0, T]$ 上完全能控的充要条件是，存在 T_{t_1}，$t_1\in[t_0, T]$，其表示为：

$T_{t_1}u=\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\beta u(s)ds$ 是不降秩的，即 T_{t_1}、$u\longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是满射（张满整个 $\mathbb{R}^n$ 空间）。

证：充分性的证明：

由于 $x(t_1)=e^{At_1}x_0+\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\beta u(s)ds+\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\sigma dw(s)$

从而 $Ex(t_1)=e^{At_1}x_0+\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\beta Eu(s)ds+0$ --- (7)

取控制 $u(s)=\beta^T e^{A^T(t_1-s)}y$，其中 y 是 n 维 r.v. 且满足：

$Ey=-L^{-1}_{(t_0,t_1)}e^{A(t_1)}Ex_0$，将 $u(s)$ 代入公式(7)得：

$$Ex(t_1)=e^{At_1}Ex_0+\int_{t_0}^{t_1}e^{A(t_1-s)}\beta\beta^T e^{A^T(t_1-s)}Ey\,ds$$

$$=e^{At_1}Ex_0+L_{(t_1,t_1]}\cdot Ey=e^{At_1}Ex_0-e^{At_1}Ex_0=0$$

即知均值 $Ex(t)$ 在区间 $[t_0, t_1]$ 上完全能控，又由于：

$dx(t)=Ax(t)dt+\beta u(t)dt+\sigma dw(t)$ 是定常系统，所以在区间 $(t, t_1]$ 上完全能控 $\Longleftrightarrow$ 在任意区间 $[t_\alpha, t_\beta]$ 上是完全能控的。

充分性证毕