厦门大学研究生毕业论文

一类双控制系统的可达集性质及最优控制存在性

系(所、室)：计算机科学系
专　　业：控制理论
研究生：王志平
指导教师：李文清教授

一九八四年十一月

一类双控制系统的可达集性质及最优控制存在性

§0 引言

对于带有约束的微分方程描述的系统，Berkovitz 著的《Optimal Control Theory》〔1〕一书详细讨论了在控制约束为凸的假设下，Bolza 型问题（即指标形如 $J(x_0,u)=$ $=\phi(t_0,t_1,x(t_0),x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}L(t,x(t),u(t))dt$）的最优控制存在性条件 Christopeit 在〔2〕中将线性随机系统转化为形如：

$$(0.1)\qquad \frac{dx}{dt}=\{A(t)+f(t,u_1(t))\}x(t)+h(t,u_2(t))$$

的双控制确定性系统，从而利用〔1〕中的结果导出 Bolza 型问题的随机最优控制存在性条件。

本文在§1，§2中运用此思想来讨论线性随机系统，但不要求第二个控制 u_2 的约束为凸的，我们先讨论（0.1）形系统的可达集性质，然后导出关于 Mayer 型问题（即指标形如 $J(x_0,u)=\phi(t_0,t_1,x(t_0),x(t_1))$）的最优控制的存在性条件，在§1中我们得到了可达集的紧性结果，且导出最优控制的存在性条件。在§2中，我们将初始分布是正态的随机系统转化为形如（0.1）的确定性系统，从而应用§1的结果，导出一个随机最优控制的存在性，在§3中，我们考虑初始分布为一般的情形，我们采用§1的方法直接讨论随机系统的可达集性质，以此来得到一最优控制存在性条件，最后在§4我们给出一个随机控制的简单例子，它满足我们定理的条件，然后用最大值原理来求出最优控制。

§1 确定性系统的可达集与最优控制存在性

我们考虑如下双控制的系统

$$(1.1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = [A(t)+f(t,u_1(t))]x(t)+h(t,u_2(t)) & t_0\le t\le T<\infty \\ x(t_0)=x_0\in R^n \end{cases}$$

在讨论这个系统之前，我们说明一些记号及作一些假定。

记号：

R^n：实n维欧氏空间，其上范数为 $\|x\|=(x^Tx)^{1/2}$

$R^{n\times n}$：R 上 $n\times n$ 矩阵空间，其上范数为 $\|A\|=(trA^TA)^{1/2}$

trA^TA 表示 A^TA 的迹。

Ω_i 是 $[t_0,T]$ 到 R^{m_i} 子集的映照，即对每一 $t\in[t_0,T]$，$\Omega_i(t)$ 是 R^{m_i} 的子集，$(i=1,2)$ Ω_i 称为控制约束。

$\mathcal{U}_i$ 是 $[t_0,T]$ 到 R^{m_i} 满足 $u_i(t)\in\Omega_i(t)$，$t\in[t_0,T]$ 的可测映照全体，称为控制集合 $(i=1,2)$。

假定：

(A) $A(\cdot)\in C([t_0,T],R^{n\times n})$，即 A 是 $[t_0,T]$ 到 $R^{n\times n}$ 的连续函数矩阵。

(B) $f(\cdot,\cdot)\in C([t_0,T]\times R^{m_1},R^{n\times n})$，当固定 $t\in[t_0,T]$ 时，$f(t,\cdot)$ 是 $R^{m_1}\to R^{n\times n}$ 的线性映照，且在 $\Delta_1=\{(t,z):t\in[t_0,T],\ z\in\Omega_1(t)\}$ 上有界。

(C) $h(\cdot,\cdot)\in C([t_0,T]\times R^{m_2},R^n)$，且有 $[t_0,T]$ 上的非负 L-可积函数 $m(t)$，使得：$\|h(t,z_2)\|\le m(t)$，$(t,z_2)\in\Delta_2$，

其中 $\Delta_2=\{(t,z_2),\ t\in[t_0,T],\ z_2\in\Omega_2(t)\}$。

(E) Ω_i 在 $[t_0,T]$ 上上半连续，即对每一 $t\in[t_0,T]$ 成立

$$\bigcap_{\delta>0} cl\,\Omega_i(N_\delta(t))\subset\Omega_i(t),\quad i=1,2$$

其中 clM 表示集合 M 的闭包，$N_\delta(t)=\{s:|s-t|\le\delta\}$，$\Omega_i(N_\delta(t)) = \bigcup_{s\in N_\delta(t)}\Omega_i(s)$ $i=1,2$

〔注1〕：假定(E)保证了控制集合 $\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2$ 非空（[1] Lemma Ⅲ 11.1），而假定(A)，(B)，(C)保证了对应每一对控制 $(u_1,u_2)\in\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2$，方程(1.1)都存在唯一解，即 (u_1,u_2) 是允许控制，所以 $\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2$ 是非空的允许控制集合。

(D) $\Omega_i(t)$ 是非空紧集，$t\in[t_0,T]$ $i=1,2$. $\Omega_1(t)$ 还是凸的 $t\in[t_0,T]$

令 $\mathcal{F}_t=\{F: F(s)\in f(s,\Omega_1(s)),\ a.s.\ s\in[t_0,t]\}\cap L_1([t_0,t],R^{n\times n})$

$L_1([t_0,t],R^n)$ 表示 $[t_0,t]$ 到 R^n 的可积映照全体，范数为 $\|F\|_1=\int_{t_0}^{t}\|F(s)\|ds$，对于每一 $F\in\mathcal{F}_t$，记 Φ_F 为对应的基解矩阵，即

$$(1.2)\quad \begin{cases}\dot{\Phi}_F(s)=(A(s)+F(s))\Phi_F(s)\\ \Phi_F(t_0)=I\end{cases}\qquad t_0\leq s\leq t$$

我们有如下关于 Φ_F 的性质

引理 1：(i) 存在 $M>0$，使得 $\max\limits_{s\in[t_0,t],F\in\mathcal{F}_t}\|\Phi_F(t)\|<M$，$\max\limits_{s\in[t_0,t],F\in\mathcal{F}_t}\|\Phi_F^{-1}(t)\|\leq M$

(ii) 当 $S\longrightarrow S_0$，$F\xrightarrow{弱}F_0$（即按 L_1 范数的弱收敛），$S,S_0\in[t_0,t]$，$F,F_0\in\mathcal{F}_t$ 则有 $\Phi_F(S)\longrightarrow\Phi_{F_0}(S_0)$，$\Phi_F^{-1}(S)\longrightarrow\Phi_{F_0}^{-1}(S_0)$

〔证〕为了证明 Φ_F 的上述结论，我们只需证明关于向量函数 α_F 的如下结论，设 α_F 是 n 维空间上方程

$$(1.3)\quad\begin{cases}\dot{\alpha}_F(s)=(A(s)+F(s))\alpha_F(s)\\ \alpha_{F}(t_0)=x_0\in R^n\end{cases}$$

的解，则 (i') 存在 $M'>0$，使得 $\max\limits_{s\in[t_0,t],F\in\mathcal{F}_t}\|\alpha_F(s)\|\leq M'$

(ii') 当 $S\longrightarrow S_0$，$F\xrightarrow{弱}F_0$，$S,S_0\in[t_0,t]$，$F,F_0\in\mathcal{F}_t$ 时 $\alpha_F(s)\longrightarrow\alpha_{F_0}(S_0)$

由 $A(s)$，$\alpha_{F_0}(s)$ 的连续性与 f 在 Ω_1 上的有界性，知有 $M_1>0$，使得

$$(1.4)\quad \|\alpha_{F_0}(s)\|\leq M_1,\quad \|A(s)\|+\|F(s)\|\leq M_1,\quad s\in[t_0,t],\ F\in\mathcal{F}_t$$

因 $\alpha_F(s)=\alpha_0+\int_{t_0}^{s}(A(\tau)+F(\tau))\alpha_F(\tau)d\tau$ 得 $\|\alpha_F(s)\|<x_0+M_1\int_{t_0}^{s}\|\alpha_F(\tau)\|d\tau$ 由 Gronwall 不等式得 $\|\alpha_F(s)\|\leq\|x_0\|e^{M_1(s-t_0)}\leq\|\alpha_0\|e^{M_1(t-t_0)}$，取 $M'=\|x_0\|e^{M_1(t-t_0)}$ 即得 (i')

由 (1.3) $\alpha_F(s)-\alpha_{F_0}(s)=\int_{t_0}^{s}(A(\tau)+F(\tau))\alpha_F(\tau)d\tau-\int_{t_0}^{s}(A(\tau)+F_0(\tau))$

$x_{F_0}(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{s}(A(\tau)+F(\tau))(x_F(\tau)-x_{F_0}(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{s}(F(\tau)-F_0(\tau))x_{F_0}(\tau)d\tau$

令 $h(s)=\|\int_{t_0}^{s}(F(\tau)-F_0(\tau))x_{F_0}(\tau)d\tau\|$，则由(1.4) h 在 $[0, t]$ 上有界，

$\|x_F(s)-x_{F_0}(s)\| \le M_1\int_{t_0}^{s}\|x_F(\tau)-x_{F_0}(\tau)\|d\tau + h(s)$，由 Gronwall-Bellman 不等式（[5] Appendices A）得

(1.5) $\|x_F(s)-x_{F_0}(s)\| \le h(s)+M_1\int_{t_0}^{s}h(\tau)\exp[M_1(s-\tau)]d\tau,\quad s\in[t_0,t]$

利用 (i') $\|x_F(s)-x_F(s_0)\|\le M_1\cdot M'|s-s_0|$，再应用 $s=s_0$ 的(1.5)式，得

(1.6) $\|x_F(s)-x_{F_0}(s_0)\| \le M_1\cdot M'|s-s_0| + h(s_0)+M_1\int_{t_0}^{s_0}h(\tau)\exp[M_1(s_0-\tau)]d\tau$ 当 $F\xrightarrow{弱}F_0$ 时，$h(s)\longrightarrow 0$ $s\in[t_0,t]$ 由 $h(s)$ 的有界性，及 Lebesgue 控制收敛定理得 $\int_{t_0}^{s_0}h(\tau)\exp[M_1(s_0-\tau)]d\tau\longrightarrow 0$ 从而由(1.6)式知结论(ii')成立。

因 $(\Phi_F^{-1})^T$ 满足如下方程（上标 T 表示矩阵的转置）

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}(\Phi_F^{-1}(s))^T = -(A^T(s)+F^T(s))(\Phi_F^{-1}(s))^T\\ (\Phi_F^{-1}(t_0))^T = I\end{cases}$$

则由 x_F 的有界性证明知：结论(i) 对 $(\Phi_F^{-1}(s))^T$ 成立，但 $\|\Phi_F^{-1}(s)\|=\|(\Phi_F^{-1}(s))^T\|$，可以 Φ_F^{-1} 满足(i) $\|\Phi_F^{-1}(s)-\Phi_F^{-1}(s_0)\| = \|\Phi_F^{-1}(s)(\Phi_{F_0}(s_0)-\Phi_F(s))\Phi_{F_0}^{-1}(s_0)\|\le M^2\|\Phi_F(s)-\Phi_{F_0}(s_0)\|$ 可以 $\Phi_F^{-1}(s)$ 也满足(ii)，证毕。

定义1（可达集）：系统(1.1)带初始点 (t_0, x_0)，在时刻 t，$(t\ge t_0)$ 的可达集定义为所有这样的点 x 的集合，有一对控制 (u_1, u_2)，$u_1\in\mathcal{U}_1$，$u_2\in\mathcal{U}_2$，对应的满足 $\varphi(t_0)=x_0$ 的轨线，关系式 $\varphi(t)=x$ 成立，记此可达集为 $K(t, t_0, x_0)$，即 $K(t, t_0, x_0)=\{x: x=\varphi(t), t\ge t_0, \varphi(t_0)=x_0, \varphi$ 对应于 $(u_1,u_2)\in\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2\}$，设 D 为 $[t_0, T]$ 的一个子集，在时间 D 上的可达集定义为 $K(D, t_0, x_0)=\bigcup_{t\in D}K(t, t_0, x_0)$。

由于在假定(D)中，我们没有要求 $\Omega_2(t)$ 是凸的，因而我

们要考虑(1.1)的松弛系统及松弛控制，它的作用事实上是凸化控制约束。

定义 2：一个定义在 $[t_0, T]$ 上取值于 $R^{m} \times \underbrace{R^{m} \times \cdots \times R^{m}}_{n+1} \times \underbrace{[0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n+1}$ 的形如 $V=(u_1, u_2^1, \cdots u_2^{n+1}, p^1, \cdots, p^{n+1})$ 的可测映照，如果成立 $u_1 \in \mathcal{U}_1$，$u_2^i \in \mathcal{U}_2$ $i=1,2,\cdots,n+1$，在 $[t_0, T]$ 上 $p^i(t) \geq 0$，$i=1,2,\cdots,n+1$，且 $\sum_{i=1}^{n+1} p^i(t)=1$，且存在一个定义在 $[t_0, T]$ 上的绝对连续 $\psi(t)$，使得 $\psi(t)$ 是

$$(1.1') \quad \frac{dX}{dt} = [A(t)+f(t,u_1(t))]X(t) + \sum_{i=1}^{n+1} p^i(t) h(t, u_2^i(t))$$

a.s. $t \in [0, T]$ 的解，则称 V 为(1.1)的松弛控制。ψ 称为对应于 V 的松弛轨线系统(1.1')称为(1.1)的松弛系统。

相应于松弛系统在 t 及 D 的可达集分别用 $K_R(t, t_0, X_0)$ 和 $K_R(D, t_0, X_0)$ 来表示。

定义 3（*Hausdorff* 度量）：设 X 是一度量空间，d 为其上度量，$\mathcal{Y}$ 为 X 的所有紧子集全体，在 $\mathcal{Y}$ 上定义

$$d_h(A, B) = \frac{1}{2}\left\{\max_{a \in A} d(a, B) + \max_{b \in B} d(A, b)\right\}$$

则 d_h 是 $\mathcal{Y}$ 上一度量，称为 *Hausdorff* 度量。

下面给出可达集的定理

定理 1：假定 (A), (B), (C), (D), (E) 成立，则对 $[t_0, T]$ 的任一非空紧子集 D，$K_R(D, t_0, X_0)$ 和 $K(D, t_0, X_0)$ 皆为非空紧集，满足 $K_R(D, t_0, X_0) = K(D, t_0, X_0)$。还有，映照 $D \to K(D, t_0, X_0)$ 是 $[t_0, T]$ 的紧子集到 R^n 的紧子集的关于 *Hausdorff* 度量的连续映照。

在证明这个定理之前，我们先证明两个引理，我们要用这样一个可测映照存在定理。

引理 2. 设 T 是一可测空间，Z 是一 *Hausdorff* 空间，D 是一个拓扑空间，它是可数个紧的可度量子集的并，$\Gamma: T \to Z$ 是可测映照，$\Phi: D \to Z$ 是连续映照，使得 $\Gamma(T) \subset \Phi(D)$，则存在可测映照，$u: T \to \Gamma$，使得 $\Phi * u = \Gamma$，$*$ 表示二个映照的复合，即对任意 $t \in T$ $(\Phi * u)(t) = \Phi(u(t))$。

引理 2 的证明见 [1] 的 Theorem Ⅲ 7.1。

令 $Q_t=\{q: q(s)\in \mathrm{co}\,h(s,\Omega_2(s)),\ a.s.\ s\in[t_0,t]\}\cap L_1([t_0,t],R^n)$

其中 $\mathrm{co}M$ 表示集合 M 的凸包，再令

$$Q_t'=\{q: q(s)=\sum_{i=1}^{n+1}p^i(s)h(s,u_2^i(s)),\ a.s.\ s\in[t_0,t],\ u_2^i\in\mathcal{U}_2,\ p^i(s)\geq 0$$

$$(i=1,2,\cdots,n+1)\ \sum_{i=1}^{n+1}p^i(s)=1,\ s\in[t_0,t]\}$$

$$\mathcal{F}_t'=\{F: F(s)=f(s,u_1(s)),\ a.s.\ s\in[t_0,t],\ u_1\in\mathcal{U}_1\}$$

则有

引理 3： $Q_t=Q_t'$，$\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_t'$（$\mathcal{F}_t$ 的定义见引理（ ））

［证］由假定（ ）知 $Q_t'\subset L_1([t_0,t],R^n)$ 因而 $Q_t'\subset Q_t$，现证 $Q_t\subset Q_t'$

记 $\Omega_2^{n+1}(s)=\underbrace{\Omega_2(s)\times\cdots\times\Omega_2(s)}_{n+1}$，$s\in[t_0,t]$，$\bar{Z}_2=(z_2^1,z_2^2\cdots z_2^{n+1})$，

$p=(p^1,p^2,\cdots p^{n+1})$

令 $G=\{(s,\bar{Z}_2,p),\ s\in[t_0,t],\ \bar{Z}_2\in\Omega_2^{n+1}(s),\ p^i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n+1}p^i=1\}$

则 G 是闭集：设 $g_0=(s_0,\bar{Z}_{20},p_0)\in \mathrm{cl}\,G$，$g_m=(s_m,\bar{Z}_{2m},p_m)\in G$，$g_m\to g_0$，则 $s_0\in[t_0,t]$，$p_0^i=\lim_{m\to\infty}p_m^i\geq 0$，$\sum_{i=1}^{n+1}p_0^i=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n+1}p_m^i=1$，对任意 $\delta>0$，有 $M(\delta)$，使得当 $m>M(\delta)$ 时，$s_m\in N_\delta(s_0)$，则 $\bar{Z}_{2m}\in\Omega_2^{n+1}(s_m)\subset\Omega_2^{n+1}(N_\delta(s_0))$，所以 $\bar{Z}_{20}\in \mathrm{cl}\,\Omega_2^{n+1}(N_\delta(s_0))$，由 δ 的任意性 $\bar{Z}_{20}\in\bigcap_{\delta>0}\mathrm{cl}\,\Omega_2^{n+1}(N_\delta(s_0))$，由于 Ω_2 上半连续，易知 Ω_2^{n+1} 也是上半连续的，即 $\bigcap_{\delta>0}\mathrm{cl}\,\Omega_2^{n+1}(N_\delta(s_0))\subset\Omega_2^{n+1}(s_0)$，所以 $\bar{Z}_{20}\in\Omega_2^{n+1}(s_0)$，这表明 $g_0\in G$，得证 $\mathrm{cl}\,G=G$，由于 G 是闭集，因而可表为可列个紧集的并。

作 G 到 $[t_0,t]\times R^n$ 的映照 $\Phi:(s,\bar{Z}_2,p)\to(s,\sum_{i=1}^{n+1}p^ih(s,z_2^i))$

现取 $q\in Q$，令 $\tilde{q}(s)=q(s)$，$a.s.\ s\in[t_0,t]$，且对所有 $s\in[t_0,t]$，$\tilde{q}(s)\in \mathrm{co}\,h(s,\Omega_2(s))$ 作 $[t_0,t]$ 到 $[t_0,t]\times R^n$ 的映照 Γ 为 $\Gamma(s)=(s,\tilde{q}(s))$。

由于 $\tilde{q}(s)\in \mathrm{co}\,h(s,\Omega_2(s))$ 由关于凸包的 Caratheodory 定理（［6］，Theorem 1.8），$\tilde{q}(s)$ 可表为 $h(s,\Omega_2(s))$ 的

至多 $n+1$ 个元素的凸组合，所以 $\Gamma([t_0,t])\subset\varphi(G)$。

由引理2，存在 $[t_0,t]$ 到 G 的可测映照：$s\to(\lambda(s),\bar{u}_2(s),\rho(s))$，$\bar{u}_2(s)\in\Omega_2^{n+1}(\lambda(s))$，$\sum_{i=1}^{n+1}\rho^i(s)=1$，$\rho^i(s)\geq 0$，$i=1,2,\cdots,n+1$，使得 $\langle\lambda(s),\sum_{i=1}^{n+1}\rho^i(s)h(t,u_2^i(s))\rangle=\langle s,\tilde{q}(s)\rangle$（这里 $\bar{u}_2(s)=(u_2^1(s),u_2^2(s),\cdots u_2^{n+1}(s))$），所以 $\lambda(s)=s$，$q(s)=\sum_{i=1}^{n+1}\rho^i(s)h(t,u_2^i(s))$，$u_2^i\in\Omega_2(s)$，$i=1,2,\cdots n+1$，所以 $q\in Q_t'$ 得证 $Q_t'=Q_t$，从而 $Q_T=Q_t'$

由于 $\Omega_1(s)$ 是凸的，$f(t,z_1)$ 关于 z_1 线性，所以 $\mathrm{co}f(s,\Omega_1(s))=f(s,\Omega_1(s))$，所以同样可证 $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_t'$，证毕。

引理4：$\mathcal{F}_t$，Q_t 是弱紧集 $t\in[t_0,T]$

〔证〕由 $\mathcal{F}_t$，Q_t 的定义即知 $\mathcal{F}_t$，Q_t 是凸集，由 $\Omega_i(s)$ 的紧性，知 $f(s,\Omega_1(s))$，$h(s,\Omega_2(s))$ 是紧集，则 $\mathrm{co}h(s,\Omega_2(s))$ 也是紧集（[6]，Theorem I. 10），$s\in[t_0,t]$。

$\mathcal{F}_t$，Q_t 是闭集：设 $F_n\in\mathcal{F}_t$，$F_0\in\mathrm{cl}\,\mathcal{F}_t$，$F_n\longrightarrow F_0$，$n\to\infty$ 这收敛是依 L_1 范数收敛，因而有子列 $\{F_{n_k}\}$，使得 $F_{n_k}(s)\to F_0(s)$，a.s. $s\in[t_0,t]$，由 $f(s,\Omega_1(s))$ 的闭性，知 $F_0(s)\in f(s,\Omega_1(s))$，a.s. $s\in[t_0,t]$，所以 $F_0\in\mathcal{F}_t$，得证 $\mathrm{cl}\,\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}_t$，同样可以证明 Q_t 是闭集。

$\mathcal{F}_t$，Q_t 是强凸闭，则是弱凸闭。

由假定(B)和(C)，有 $M>0$ 使 $\|F(s)\|\leq M$，$F\in\mathcal{F}_t$，而 $\|q(s)\|\leq m(s)$，$q\in Q_t$ 因而 $\lim_{m(E)\to 0}\int_E F(s)ds=0$，$\lim_{m(E)\to 0}\int_E q(s)ds$，分别对 $F\in\mathcal{F}_t$，$q\in Q_t$ 是一致的（$m(E)$ 表示 R^1 中可测集 E 的 Lebesque 测度），所以 $\mathcal{F}_t$，Q_t 是弱叙列紧的（[4] Corollary IV 8.11），再由 Eberlein－Smulian 定理（[4] Theorem V.6.1）$\mathcal{F}_t$，Q_t，的弱闭包是弱紧的，所以 $\mathcal{F}_t$，Q_t 是弱紧集，证毕。

〔定理1的证明〕：

由〔注1〕说明，知 $K(D,t_0,x_0)$，$K_R(D,t_0,x_0)$ 是非空的，下面先证紧性。

由引理3，松弛系统（1.1'）可表为系统

$$(1.7)\quad\begin{cases}\dot{x}(t)=(A(t)+F(t))x(t)+q(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\qquad t_0\leq t\leq T$$

其中 $F\in\mathcal{F}_T$，$q\in Q_T$，由参数变易公式

(1.8) $x(t)=\Phi_F(t)\left[x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi_F^{-1}(s)q(s)ds\right]$

其中 $\Phi_F(t)$ 为由 (1.2) 式定义的 $[t_0,T]$ 上的基本矩阵。定义 $D\times\mathcal{F}_T\times Q_T$ 到 R^n 的映照 T 为:

(1.9) $T(t,F,q)=\Phi_F(t)\left[x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi_F^{-1}(s)q(s)ds\right]$

则 $K_R(D,t_0,x_0)=T(D\times\mathcal{F}_T\times Q_T)$

由引理4知 $D\times\mathcal{F}_T\times Q_T$ 是弱紧的，因而我们只要证明 T 是从 $D\times\mathcal{F}_T\times Q_T$ 的弱拓扑到 R^n 的连续映照，则得 $K_R(D,t_0,x_0)$ 是紧的。

记 $I_1=\Phi_F(t)\left[x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi_F^{-1}(s)q(s)ds\right]-\Phi_F(t)\left[x_0+\int_{t_0}^{s_0}\Phi_F^{-1}(s)q(s)ds\right]$

$I_2=\Phi_F(t)\left[x_0+\int_{t_0}^{s_0}\Phi_F^{-1}(s)q(s)ds\right]-\Phi_{F_0}(s_0)\left[x_0+\int_{t_0}^{s_0}\Phi_F^{-1}(s)q(s)ds\right]$

$I_3=\Phi_{F_0}(s_0)\left[x_0+\int_{t_0}^{s_0}\Phi_F^{-1}(s)q(s)ds\right]-\Phi_{F_0}(s_0)\left[x_0+\int_{t_0}^{s_0}\Phi_{F_0}^{-1}(s)q(s)ds\right]$

$I_4=\Phi_{F_0}(s_0)\left[x_0+\int_{t_0}^{s_0}\Phi_{F_0}^{-1}(s)q(s)ds\right]-\Phi_{F_0}(s_0)\left[x_0+\int_{t_0}^{s_0}\Phi_{F_0}^{-1}(s)q_0(s)ds\right]$

则

(1.10) $T(t,F,q)-T(s_0,F_0,q_0)=I_1+I_2+I_3+I_4$

我们应用引理1于 $\|I_i\|$，$i=1,2,3,4$

(1.11) $\|I_1\|\le\|\Phi_F(t)\|\left\|\int_{s_0}^{t}\Phi_F^{-1}(s)q(s)ds\right\|\le M^2\left|\int_{s_0}^{t}m(s)ds\right|$

(1.12) $\|I_2\|\le\|\Phi_F(t)-\Phi_{F_0}(s_0)\|\left(\|x_0\|+M\int_{t_0}^{T}m(s)ds\right)$

(1.13) $\|I_3\|\le M\left\|\int_{t_0}^{s_0}\left(\Phi_F^{-1}(s)-\Phi_{F_0}^{-1}(s)\right)q(s)ds\right\|$

(1.14) $\|I_4\|\le M\left\|\int_{t_0}^{s}\Phi_{F_0}^{-1}(s)\left(q(s)-q_0(s)\right)ds\right\|$

(1.15) $\|T(t,F,q)-T(s_0,F_0,q_0)\|\le\|I_1\|+\|I_2\|+\|I_3\|+\|I_4\|$

由 $m\in L_1([t_0,T],R)$，$\int_{s_0}^{t}m(s)ds\to0$，当 $t\to s_0$。由引理 $\|\Phi_F(t)-\Phi_{F_0}(s_0)\|\to0$，当 $t\to s_0$ 及 $F\xrightarrow{\text{弱}}F_0$，由引理1(i)，$\|\Phi_F^{-1}(s)-\Phi_{F_0}^{-1}(s)\|\le2M$，及 $\|q(s)\|\le m(s)$，再由 Lebesgue 控制收敛定理和引理1(ii)得 $\int_{t_0}^{s_0}(\Phi_F^{-1}(s)-\Phi_{F_0}^{-1}(s))q(s)ds\to0$ 当 $F\xrightarrow{\text{弱}}F_0$。由 $\|\Phi_{F_0}^{-1}(s)\|\le M$，$\int_{t_0}^{s_0}\Phi_{F_0}^{-1}(s)(q(s)-q_0(s))ds\to0$，当 $q\xrightarrow{\text{弱}}q_0$。综上由

式(1.11)-(1.15)得：当 $(t, F, q) \xrightarrow{\text{弱}} (s_0, F_0, q_0)$ 时，$\|T(t, F, q)-$
$-T(s_0, F_0, q_0)\| \longrightarrow 0$。即得证 T 的连续性，所以 $K_R(D, t_0, x_0)$
是紧集。

现证 $K_R(D, t_0, x_0)=K(D, t_0, x_0)$，由松弛系统的定义知
$K(D, t_0, x_0) \subset K_R(D, t_0, x_0)$，只需证 $K_R(D, t_0, x_0) \subset K(D, t_0,$
$x_0)$.

设 $x \in K_R(D, t_0, x_0)$，则有 $t \in D$，$F \in \mathcal{F}_T$，$q \in Q_T$，使得
$x = T(t, F, q) = \Phi(t)[x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi_F^{-1}(s) q(s) ds]$，固定 t，作 Q_t 到 R^n
的映照 T_1：

$$T_1 q = \int_{t_0}^{t} \Phi_F^{-1}(s) q(s) ds$$

它是 Q_t 的弱拓扑到 R^n 的连续映照，令 $a = \Phi_F^{-1}(t) x - x_0$，则
$T_1^{-1}(a)$ 是 Q_t 中的弱紧凸集，由 Krein-Milman 定理([8],
Chapter 12, §1)，$T_1^{-1}(a)$ 有一极端点 $q_0 \in Q_t$，由引理 3，有
一组 $[t_0, t]$ 上的可测函数 p^i，$i=1, 2, \cdots, n+1$，及 $u_2^i \in \mathcal{U}_2$，
$i=1, 2, \cdots n+1$，使得成立

$$(1.16)\quad \begin{cases} q_0(s) = \sum_{i=1}^{n+1} p^i(s) h(s, u_2^i(s)) & a.s.\ s \in [t_0, t] \\ p^i(s) \geq 0 & i=1, 2, \cdots n+1,\quad s \in [t_0, t] \\ \sum_{i=1}^{n+1} p^i(s) = 1, & s \in [t_0, t] \end{cases}$$

我们先来改造 q_0 的表达式，记

$$E_K^i = \{ s : h(s, u_2^i(s)) = h(s, u_2^K(s)),\ s \in [t_0, t] \},\quad K=2, 3 \cdots n+1,\ i=1, 2 \cdots K-1,$$

$$E_K = \bigcup_{i=1}^{K-1} E_K^i \qquad K=2, 3, \cdots n+1$$

(i) 在 E_{n+1}^n 上改造 p^n, p^{n+1}，令

$$\bar{p}^n(s) = \begin{cases} p^n(s) & s \in [t_0, t] - E_{n+1}^n \\ p^n(s) + p^{n+1}(s) & s \in E_{n+1}^n \end{cases}$$

$$\bar{p}^{n+1}(s) = \begin{cases} p^{n+1}(s) & s \in [t_0, t] - E_{n+1}^n \\ 0 & s \in E_{n+1}^n \end{cases}$$

我们仍记 $\bar{p}^n$, $\bar{p}^{n+1}$ 为 p^n, p^{n+1}，从而得到一组新的 p^1, p^2, …
p^{n+1}，它满足(1.16)式且有 $p^{n+1}(s)=0$，$s \in E_{n+1}^n$。

(ii) 依次在集 E^{i}_{n+1} 上重复步骤(i) [illegible] 来构造 (p^{i}, p^{n+1})，$i=n-1, n-2, \cdots 1$，得到新的一组 $(p^{1}, p^{2}, \cdots p^{n+1})$ 它满足式(1.16)，且 $p^{n+1}(s)=0$，$s\in E_{n+1}$。

(iii) 依次 $k=n, n-1, \cdots 2$，固定 $p^{k+1}, \cdots p^{n+1}$，而在集 E_{k} 上重复步骤(i)、(ii) 来构造 $p^{1}, \cdots p^{k}$。

最后我们得到一组 $(p^{1}, p^{2}, \cdots p^{n+1})$，它满足式(1.16)，且有性质

(1.17) $\quad p^{k}(s)=0 \quad s\in E_{k}, \quad k=2, 3, \cdots n+1.$

我们来证明这时有某一 i，$1\le i\le n+1$，使得 $p^{i}(s)=1$. a.s. $s\in[t_0, t]$，即 ϱ_0 可表为 $\varrho_0(s)=h(s, u_2^{i}(s))$，a.s. 于 $[t_0, t]$，这样一来，我们就有 $T\varrho_0=a=\Phi_F^{-1}(t)x-x_0$，即 $x=\Phi_F(t)[x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi_F^{-1}(s)h(s, u_2^{i}(s))ds]$，亦即 $x\in K(D, t_0, x_0)$.

否则的话，则有 i_0，和 $\varepsilon'>0$，使得在 $[t_0, t]$ 的一个 E 测度集 E' 上 $\varepsilon'\le p^{i_0}(s)\le 1-\varepsilon'$，由此 $\varepsilon'\le\sum\limits_{i\ne i_0}p^{i}(s)\le 1-\varepsilon'$, $s\in E'$，因而有 j_0, $j_0\ne i_0$，使得在 E' 的一个正测度子集 E 上，$\frac{\varepsilon'}{n}\le p^{j_0}(s)\le 1-\varepsilon'\le 1-\frac{\varepsilon'}{n}$，令 $\varepsilon=\frac{\varepsilon'}{n}$，则在 E 上成立

(1.18) $\quad \varepsilon\le p^{j_0}(s)\le 1-\varepsilon, \quad \varepsilon\le p^{i_0}(s)\le 1-\varepsilon, \quad s\in E$

$$\text{令 } y(s)=\begin{pmatrix}\Phi_F^{-1}(s)h(s, u_2^{i_0}(s))\\ \Phi_F^{-1}(s)h(s, u_2^{j_0}(s))\end{pmatrix}$$

由 Bang-Bang 原理（[7], Theorem I. 8.2），存在一可测子集 $E_0\subset E$，使得

$$\frac{1}{2}\int_E y(s)ds=\int_{E_0}y(s)ds$$

此即 $\frac{1}{2}\int_E\Phi_F^{-1}(s)h(s, u_2^{k}(s))ds=\int_{E_0}\Phi_F^{-1}(s)h(s, u_2^{k}(s))ds$，$k=i_0, j_0$.

令 $\gamma(s)=2\chi_{E_0}(s)-\chi_E$，$\chi_{E_0}$、$\chi_E$ 分别表 E_0、E 的特征函数，则 $|\gamma(s)|=1$, $s\in E$，$\gamma(s)=0$, $s\in[t_0, t]-E$，上一等式化为

(1.19) $\quad \int_{t_0}^{t}\Phi_F^{-1}(s)\gamma(s)h(s, u_2^{k}(s))ds=0 \qquad k=i_0, j_0$

令 $\pi_1^{i_0}=p^{i_0}+\varepsilon\gamma$，$\pi_1^{j_0}=p^{j_0}-\varepsilon\gamma$，$\pi_1^{i}=p^{i}$，$i\ne i_0, j_0$，$i=1, 2, \cdots n+1$

$\pi_2^{i_0}=p^{i_0}-\varepsilon\gamma$，$\pi_2^{j_0}=p^{j_0}+\varepsilon\gamma$，$\pi_2^{i}=p^{i}$，$i\ne i_0, j_0$，$i=1, 2, \cdots n+1$

则由 (1.18) $0 \leq \pi_j^i \leq 1$, $i=1,2,\cdots n+1$ 且 $\sum_{i=1}^{n+1}\pi_j^i = 1$, $j=1,2$

令 $q_j(s) = \sum_{i=1}^{n+1}\pi_j^i(s) h(s, u_2^i(s))$, $j=1,2$

则 $q_j(s) \in Q_t$, $j=1,2$, 且由 (1.19) $a = \int_{t_0}^{t} \Phi_F^{-1}(s) q_j(s) ds$ $j=1,2$, 所以 $q_j \in T_1^{-1}(a)$ $j=1,2$, 且有 $q_0 = \frac{q_1+q_2}{2}$, 我们来证 $q_1 \neq q_2$, 不妨设 $i_0 < j_0$, 则 $j_0 \geq 2$, 由 (1.17) 及 (1.18) 得 $E \subset [t_0, t] - E_{j_0} =$
$= \bigcap_{j=1}^{j_0-1}([t_0,t] - E_j^i) \subseteq [t_0,t] - E_{j_0}^{i_0} = \{s;\ h(s, u_2^{i_0}(s)) \neq h(s, u_2^{j_0}(s)),$ $s \in [t_0, t]\}$, 而 $q_1(s) - q_2(s) = 2\varepsilon r(h(s,u_2^{i_0}(s)) - h(s,u_2^{j_0}(s)))$, 因而在 E 上 $q_1(s) - q_2(s) \neq 0$, 所以 $q_1 \neq q_2$, 这样 $q_0 = \frac{q_1+q_2}{2}$ 就与 q_0 是 $T_1^{-1}(a)$ 的极端点矛盾, 所以得证 $K_R(D, t_0, x_0) \subset K(D, t_0, x_0)$。则得 $K_R(D, t_0, x_0) = K(D, t_0, x_0)$。

现证在 Hausdorff 度景下, 当 $D' \longrightarrow D$ 时 $K(D', t_0, x_0) \to K(D, t_0, x_0)$

$\forall \varepsilon > 0$, 设 $\varphi(t, F, q)$ 为对应于 F, q 的 (1.1) 的解即

$$\varphi(t,F,q) = \Phi_F(t)\left[x_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi_F^{-1}(s) q(s) ds\right] \qquad t_0 \leq t \leq T$$

由引理1, $\|\Phi_F(t)\| \leq M$, $\|\Phi_F^{-1}(t)\| \leq M$, 从而 $\|\varphi(t,F,q)\| \leq M\left[\|x_0\| + M\int_{t_0}^{t} m(s)ds\right] \leq M\left[\|x_0\| + M\int_{t_0}^{T} m(s)ds\right]$, 即 φ 对所有 $(t, F, q) \in [t_0, T] \times \mathcal{F}_T \times Q_T$ 一致有界

$$\|\varphi(t',F,q) - \varphi(t,F,q)\| = \left\|\int_t^{t'}\dot\varphi(s,F,q)ds\right\| \leq \left|\int_t^{t'}\|A(s)+F(s)\|\|\varphi(s,F,q)\|ds\right| + \left|\int_t^{t'}\|q(s)\|ds\right| \leq M'\left[\|x_0\| + M\int_{t_0}^{T}m(s)ds\right]|t'-t| + \left|\int_t^{t'}m(s)ds\right|, \quad t, t' \in [t_0, T]$$

所以存在 $\delta_0 > 0$, 使得当 $|t'-t| < \delta_0$, $t', t \in [t_0, T]$ 时, 对所有 $(F, q) \in \mathcal{F}_T \times Q_T$ 成立:

(1.20) $\|\varphi(t',F,q) - \varphi(t,F,q)\| < \varepsilon$

取 $\delta = \frac{\delta_0}{2}$, 当 D', D 是 $[t_0, T]$ 的紧子集, 且 $d_h(D', D) < \delta$ 时, 任取 $x \in K(D, t_0, x_0)$ 则有 $(t, F, q) \in D \times \mathcal{F}_T \times Q_T$, 使得 $x =$
$= \varphi(t, F, q)$, $\because d_h(D', D) = \frac{1}{2}\left\{\max_{s' \in D'} d(s', D) + \max_{s \in D} d(D', s)\right\} < \delta$,

则有 $d(D', t) < 2\delta =$ [illegible]，[illegible] 使得 $|[illegible]| = d(D', t) < \delta$，由（1.18）式 $\|\varphi(t', F, \xi) - x\| <$ [illegible]，$\varphi(t', F, \xi) = K_R(D', t_0, x_0) = K(D', t_0, x_0)$，[illegible] $d(K(D', t_0, x_0), x) < \varepsilon$，从而得

$$(1.21)\quad \max_{x \in K(D, t_0, x_0)} d(K(D', t_0, x_0), x) < \varepsilon$$

同样可得

$$(1.22)\quad \max_{x' \in K(D', t_0, x_0)} d(x', K(D, t_0, x_0)) < \varepsilon$$

结合（1.21），（1.22）得 $d_H(K(D', t_0, x_0), K(D, t_0, x_0)) < \varepsilon$，因此得证 $K(D, t_0, x_0)$ 关于 D 的连续性，证毕。

由此可达集定理，我们导出下面关于Mayer型指标的最优控制存在定理。

定理 2．假定（A），（B），（C），（D），（E）成立，g 为 $[t_0, T] \times R^n$ 上的实值下半连续函数，则服从端点条件 $B = \{(t_0', x_0', t_1', x_1') : t_0' = t_0, x_0' = x_0, t_1' \in D\}$（$D$ 是 $[t_0, T]$ 中一闭集）满足方程（1.1）的系统，在控制集合 $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ 和 D 中存在使指标

$$J(t, u_1, u_2) = g(t, \varphi(t, u_1, u_2)) \qquad t \in D,\ (u_1, u_2) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$$

最小的 $(t^*, u_1^*, u_2^*) \in D \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$。这里 $\varphi(t, u_1, u_2)$ 表示对应于 u_1, u_2 的（1.1）解。

[证]：J 的最小化问题，即为 $g(t, x)$ 在集合 $D\hat{}K(D, t_0, x_0) \triangleq \{(t, x) : t \in D, x \in K(t, t_0, x_0)\}$ 上最小化问题，由于 g 的下半连续性，我们只要证，$D\hat{}K(D, t_0, x_0)$ 是紧集。

由于 D，$K(D, t_0, x_0)$ 是紧的及 $D\hat{}K(D, t_0, x_0) \subset D \times K(D, t_0, x_0)$，我们只要证 $D\hat{}K(D, t_0, x_0)$ 是闭集，设 $(t_n, x_n) \in D\hat{}K(D, t_0, x_0)$，$(t_n, x_n) \longrightarrow (s_0, y_0)$，$n \to \infty$，则 $s_0 \in D$，由定理 1，$K(t_n, t_0, x_0) \to K(s_0, t_0, x_0)$，$n \to \infty$，从而由 $x_n \in K(t_n, t_0, x_0)$，$x_n \to K(s_0, t_0, x_0)$ $n \to \infty$，从而 $y_0 \in K(s_0, t_0, x_0)$，即 $(s_0, y_0) \in D\hat{}K(D, t_0, x_0)$，证毕。

推论 1　将定理 2 中的假定（B），（C），（E）改为如下（B'），（C'），（E'）。

（B'）$f(\cdot, \cdot) \in C([t_0, T] \times R^{n_1}, R^{n \times n_1})$，当固定 $t \in [t_0, T]$，$f(t, \cdot)$ 是 $R^{n_1} \to R^{n \times n_1}$ 的线性映照。

(C') $h(\cdot,\cdot)\in C([t_0,T]\times R^{m_2}, R^n)$

(E') Ω_i 在 $[t_0,T]$ 上关于包含上半连续，即对每一 $\varepsilon>0$，及 $t\in[t_0,T]$ $\exists\,\delta>0$，使得 $\Omega_i(N_\delta(t))\subset[\Omega_i(t)]_\varepsilon$，$i=1,2$，这里 $N_\delta(t)=\{s:|s-t|\le\delta\}$，$[\Omega_i(t)]_\varepsilon=\{z_i:z_i\in R^{m_i},d(z_i,\Omega_i(t))\le\varepsilon\}$，$i=1,2$。

则定理2的结论仍成立。

〔证〕：我们来验证在条件（B'）、(C')、(E') 下，(B)、(C)、(E) 成立。

由于关于包含上半连续能推出上半连续，因而 (E) 成立。为了说明 (B)、(C) 成立，由于 f，h 是连续的，我们只要证 Δ_i 是紧集（$i=1,2$），Δ_i，($i=1,2$)，如 (B)，(C) 中所含义。

设 $(t_n,z_{1,n})\in\Delta_1$，则有子列 $\{n_k\}$ 使得 $t_{n_k}\to s_0\in[t_0,T]$ $k\to\infty$，由 Ω_1 的关于包含上半连续性，$\forall\varepsilon>0$，$\exists K$，使得当 $k\ge K$ 时，$z_{1n_k}\in\Omega_1(t_{n_k})\subset[\Omega_1(s_0)]_\varepsilon$，由 $\Omega_1(s_0)$ 紧性知 $[\Omega_1(s_0)]_\varepsilon$ 是紧集，所以 z_{1,n_k} 是有界数列，因而有子列 $\{t_{n_{k_m}}\}$，使得 $z_{1n_{k_m}}\to z_0\in[\Omega_1(s_0)]_\varepsilon$，$m\to\infty$，由 ε 的任意性 $z_0\in\bigcap_{\varepsilon>0}[\Omega_1(s_0)]_\varepsilon=\Omega_1(s_0)$，所以 $(t_{n_{k_m}},z_{1,n_{k_m}})\to(s_0,z_0)\in\Delta_1$，$m\to\infty$，即 Δ_1 是紧集，同样可证 Δ_2 是紧集。证毕。

定理1的一个推论是所谓 Bang–Bang 原理，设 $\mathscr{C}$ 是 R^{m_2} 中的紧凸集，以 $\mathscr{C}_e$ 表示 $\mathscr{C}$ 的极端点集合，由 Krein–Milman 定理，$\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{C}_e$ 的凸闭包，即 $\mathscr{C}=cl\,co\,\mathscr{C}_e$。

定理3：假定 (A)、(B) 及关于 Ω_1 的 (D)，(E) 成立，$\mathscr{C}$ 是 R^{m_2} 中的紧凸集，$\mathscr{C}_e$ 是闭的，$h(t,z_2)=B(t)z_2+C(t)$，$B(t)$，$C(t)$ 分别是 $[t_0,T]$ 到 $R^{n\times m_2}$ 和 $[t_0,T]$ 到 R^n 的连续映照，则系统 (1.1) 关于控制约束 $\Omega_1\times\mathscr{C}$ 的可达集 $K(D,t_0,x_0)$ 与关于控制约束 $\Omega_1\times\mathscr{C}_e$ 的可达集 $K_e(D,t_0,x_0)$ 皆为非空紧集且 $K(D,t_0,x_0)=K_e(D,t_0,x_0)$，这里 $(\Omega_1\times\mathscr{C})(t)=\Omega_1(t)\times\mathscr{C}$，$(\Omega_1\times\mathscr{C}_e)(t)=\Omega_1(t)\times\mathscr{C}_e$，$t\in[t_0,T]$，而且在 Hausdorff 度量下，$K_e(D,t_0,x_0)$ 关于紧集 D 连续。

〔证〕因 $\mathscr{C}_e$ 是紧的，则 $co\,\mathscr{C}_e$ 是紧集，所以 $\mathscr{C}=co\,\mathscr{C}_e$，令定理1中的 $\Omega_2(t)=\mathscr{C}_e$，$t\in[t_0,T]$，则引理3中的 $Q_t=$
$=\{q:q(s)\in co(B(s)\mathscr{C}_e+C(s)),\ a.s.\ s\in[t_0,t]\}\cap L_1([t_0,t],R^n)=$
$=\{q:q(s)\in B(s)\mathscr{C}+C(s),\ a.s.\ s\in[t_0,T]\}\cap L_1([t_0,t],R^n)$，

$t\in[t_0,T]$，因而控制 u_1 [illegible] 的系统即为 u_2 取值可配的系统之松弛系统，由定理1便得本定理的结论，证毕。

§2 初始分布为正态的线性随机系统最优控制

引言.

我们考虑如下的 n 维线性随机微分系统

$$(2.1)\quad \begin{cases} dx(t)=A(t)x(t)dt+B(t)u(t)dt+C(t)dw_t \\ x(t_0)=x_0 \end{cases} \qquad t_0\le t\le T<\infty$$

这里 w_t 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{A},P)$ 上的 d 维布朗运动过程，x_0 是 $(\Omega,\mathcal{A},P)$ 上遵从 $N(m_0,\Sigma_0)$ 的正态分布。

所要讨论的问题 P_1：是在一类控制中与 [illegible] $DC[t_0,T]$ 中寻找控制 u 与 $t_1\in D$，使得对应于 u 的系统 (2.1) 的状态满足约束

$$(2.2)\quad P(x(t_1)\in S)\ge 1-\alpha$$

下，使指标

$$(2.3)\quad J(t_1,u)=EL(t_1,x(t_1))=\int_\Omega L(t_1,x(t_1))dP$$

达到最小，其中 S 是 R^n 的 Borel 集，L 是 $D\times R^n\to R$ 的函数，α 是实数 $0<\alpha<1$。

我们取控制类为关于状态变量的线性反馈，即形如

$$(2.4)\quad u(t)=L(u_1(t))x(t)+u_2(t) \qquad t\in[t_0,T]$$

其中 u_i 为取值于 R^{m_i} 的确定性向量函数 $(i=1,2)$，L 是 R^{m_1} 到 $R^{m_2\times n}$ 的映照，在反馈 (2.4) 下，(2.1) 化为

$$(2.5)\quad \begin{cases} dx(t)=[A(t)+B(t)L(u_1(t))]x(t)dt+B(t)u_2(t)dt+C(t)dw_t \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$$

我们对系数作如下假定

(F) $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ 分别是 $[t_0,T]$ 到 $R^{n\times n}$, $R^{n\times m_2}$ 和 $R^{n\times d}$ 上的连续映照。

(G) L 是 R^{m_1} 到 $R^{m_2\times n}$ 的连续线性映照

我们仍取 u_i 的控制约束为 Ω_i $(i=1,2)$ 且假定 (D) 和 (E') 成立。

由于 x_0 是 $N(m_0,\Sigma_0)$ 分布，在上述假定下，系统 (2.5) 的解过程是高斯过程，事实上 (2.5) 的解可表为

(2.6) $x(t)=\psi(t)\left\{x_0+\int_{t_0}^{t}\psi^{-1}(s)B(s)u_2(s)ds+\int_{t_0}^{t}\psi^{-1}(s)C(s)d\omega_s\right\}$

其中$\psi(t)$是满足如下方程的基本解矩阵

(2.7) $\begin{cases}\dot\psi(t)=[A(t)+B(t)L(u_1(t))]\psi(t) \\ \psi(t_0)=I\end{cases}\quad t_0\le t\le T$

设$x(t)$遵从分布$N(m(t),\Sigma(t))$，则由(2.5)可得均值$m(t)$和方程$\Sigma(t)$满足的方程

(2.8) $\begin{cases}\dot m(t)=[A(t)+L_1(u_1(t))]m(t)+B(t)u_2(t) \\ m(t_0)=m_0\end{cases}\quad t_0\le t\le T$

(2.9) $\begin{cases}\dot\Sigma(t)=[A(t)+B(t)L(u_1(t))]\Sigma(t)+\Sigma(t)[A^T(t)+L^T(u_1(t))B^T(t)]+C(t)C^T(t) \\ \Sigma(t_0)=\Sigma_0\end{cases}\quad t_0\le t\le T$

（其中上标T表示转置），设$\Sigma=(\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots,\Sigma_n)$，$\Sigma_i$表示$\Sigma$的第$i$列（$i=1,2,\cdots,n$），记$Vec\Sigma=(\Sigma_1^T,\Sigma_2^T,\cdots\Sigma_n^T)^T$为$n^2$维向量，两矩阵的Kronecker积定义为

$$M\otimes N=\begin{pmatrix}m_{11}N & \cdots & m_{1m}N \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1}N & \cdots & m_{nm}N\end{pmatrix}$$ 这里$M=(m_{ij})_{n\times m}$，再记

(2.10,a) $\eta(t)=\begin{pmatrix}m(t) \\ Vec\,\Sigma(t)\end{pmatrix}$

(2.10,b) $\hat A(t)=\begin{pmatrix}A(t) & 0 \\ 0 & I\otimes A(t)+A(t)\otimes I\end{pmatrix}$

(2.10,c) $f(t,z_1)=\begin{pmatrix}B(t)L(z_1) & 0 \\ 0 & I\otimes(B(t)L(z_1))+(B(t)L(z_1))\otimes I\end{pmatrix}$

(2.10,d) $h(t,z_2)=\begin{pmatrix}B(t) \\ 0\end{pmatrix}z_2+\begin{pmatrix}0 \\ Vec\,C(t)C^T(t)\end{pmatrix}$

则(2.8)(2.9)化为

(2.11) $\begin{cases}\dot\eta(t)=\hat A(t)+f(t,u_1(t))\eta(t)+h(t,u_2(t)) \\ \eta(t_0)=\begin{pmatrix}m_0 \\ Vec\Sigma_0\end{pmatrix}\end{cases}\quad t_0\le t\le T$

由于(2.9)的解$\Sigma(t)$可表为