厦门大学硕士研究生毕业论文

使用矩阵V函数的大系统稳定性分析与控制

系（所、室）：计算机与系统科学系

专　　　业：运筹学与控制论

研究方向：大系统理论及应用

研究生姓名：傅　如　荣

指导教师：贺建勋教授

一九八八年六月

摘　要

本文采用矩阵形式的完全加权和李雅普诺夫函数对一般非线性系统的 Lyapunov 稳定性进行了分析。所得的结果显示出更大的灵活性和不保守性；可以用于分析和镇定具有不稳定子系统且无局部镇定负反馈的系统；同时还用这种方法分析了分离变异型系统的稳定性和大系统的关联稳定性、部分关联稳定性；并用之镇定线性大系统和设置一类双线性大系统的次最优控制[1]，都得到了较好的结果。

目　录

§1 引 言

大系统理论发展伊始，其稳定性就作为一个极重要的问题得到了较为充分的研究[2,5,10,11]，至今已成为大系统理论中比较成熟的一个分支。到目前为止，大系统的稳定性分析主要是采用所谓的分解——集结方法：(i)把系统分解成若干维数较低的子系统的耦合形式；(ii)每个孤立子系统的稳定性质由一个子系统的Lyapunov函数V_i来描述；(iii)大系统的稳定性由一个集结模型保证，这个集结模型综合考虑各个子系统稳定性质（由V_i表征）和子系统之间关联的影响。已有的工作主要是考虑如下的二种集结模型：一种是一个维数较低的比较系统，通常称为向量V函数方法；另一种是一个各孤立子系统的Lyapunov函数的加权和形式的标量函数，通常称为加权和V函数方法。但是这两种方法都要求各孤立子系统是稳定的；即使有些子系统是不稳定的，也必须有足够的局部镇定负反馈。对于具有不稳定子系统，又没有局部镇定负反馈的系统稳定性的结果不多。Thompson[9]研究过这类系统，但其结果并没有降低问题的维数，所以这类系统的稳定性问题实际上并没有很好解决。但是这又是实际中相当重要的一类系统，其稳定性和镇定值得进一步研究。

我们知道，一个具有不稳定子系统又没有局部镇定负反馈的子系统的大系统，其稳定性必然要由子系统之间的耦合来保证。这就启发我们考虑如下矩阵形式的完全加权和Lyapunov函数：

$$\beta' \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1s} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2s} \\ \cdots & & & \\ V_{s1} & V_{s2} & \cdots & V_{ss} \end{vmatrix} \beta$$

其中 s 为大系统所包含的子系统个数，$\beta' = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s\}$ 为常值参数向量，V_{ij} 为仅与第 i 个子系统与第 j 个子系统及其相互关连有关的函数，可以看成是它们"孤立耦合"引起的系统的"能量"增量。我们知道，一个系统的V函数可以看成是系统的广义能量函数，Lyapunov 直接法就是通过考虑这种广义能量函数沿系统轨线的变化率来判别系统的稳定性。我们采用前述的这种V函数，就可通过调节 V_{ij} 来减弱条件使大系统的V函数的全导数负定，从而保证其稳定性。我们采用这种形式的V函数对线性和非线性大系统进行了稳定性分析，结果说明确实可以用它来判定前述这类系统的稳定性，这种稳定性通过某些关连的贡献来保证。考虑到这种V函数的特殊形式，我们尝试使用它来分析分离变量型系统的 Lyapunov 稳定性和一般非线性系统的关联稳定性，通过一些参数的优化选择，也得到了比较不保守的结果。本文的安排是这样的：§2 介绍一些用到的记号、定义和预备知识，§3 是使用上面形式的V函数对大系统进行稳定性分析的内容，§4 讨论一类线性和双线性大系统的多水平控制，最后是结语和参考文献。

§2 预备知识

我们考虑如下形式的大系统

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x^0 \qquad (2.1)$$

其中 $x, x^0 \in R^n$，$t \in [t_0, \infty)$，$t_0 \in J \triangleq [0, \infty)$，$f: J \times R^n \to R^n$，且 $\forall t \in J$，$f(t, 0) = 0$，$x = 0$ 为 (2.1) 的孤立平衡点；设 $f(t, x)$ 满足使 (2.1) 的解具有唯一性和解的全体存在性的条件。(2.1) 可分解成如下的形式：

$$\dot{x}_i = f_i(t; x_1, x_2, \cdots, x_s), \quad i = 1, 2, \cdots, s \qquad (2.2)$$

其中 $x_i \in R^{n_i}$，$\sum_{i=1}^{s} n_i = n$，$f^T = (f_1^T, f_2^T, \cdots, f_s^T)$。

下面我们给出本文用到的若干记号、定义和性质。

在本文中，我们用 $x(t;t_0,x^0)$ 表示(2.1)或(2.2)满足初始条件 $x(t_0)=x^0$ 的解。对一个给定的矩阵A，$\lambda_{min}(A)$ 和 $\lambda_{max}(A)$ 分别表示A的最小特征值和最大特征值，如果存在的话。$\|x\|$ 表示x的欧氏范数。A^T 表示矩阵A的转置。$[a_{ij}]_{m\times n}$ 或 $|a_{ij}|_{m\times n}$ 表示一个 $m\times n$ 矩阵，其第i行j列元素为 a_{ij}。$\det A$ 表示A的行列式。

定义1[1] 系统(2.1)的平衡点 $x=0$ 称为稳定的，如果 $\forall \varepsilon>0$ 和 $t_0\geq 0$，$\exists \delta(t_0,\varepsilon)>0$，使得当 $\|x^0\|<\delta$ 时有 $\|x(t;t_0,x^0)\|<\varepsilon$，$t\geq t_0$。

定义2 系统(2.1)的平衡点 $x=0$ 称为渐近稳定的，如果(i) $x=0$ 是稳定的；(ii) $\forall t_0\in J$，$\exists \eta(t_0)>0$，只要 $\|x^0\|<\eta$，就有 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t;t_0,x^0)=0$

定义3 系统(2.1)的平衡点 $x=0$ 称为大范围渐近稳定的，如果(i) $x=0$ 是稳定的；(ii) $\lim\limits_{t\to\infty}x(t;t_0,x^0)=0$

对 $\forall t_0\in J$，$x^0\in R^n$ 所确定的解都成立。

定义4 如果在(2.1)中把 $f(t,x)$ 看成一个映射，按下面方式定义的 $s\times s$ 矩阵称为(2.1)或(2.2)的基本关连矩阵 $\bar{E}=[\bar{e}_{ij}]_{s\times s}$，其中

$$\bar{e}_{ij}=\begin{cases}1 & x_j \text{ 里含于 } f_i(t,x) \text{ 中}\\ 0 & x_j \text{ 不里含于 } f_i(t,x) \text{ 中}\end{cases}$$

定义5 一个 $s\times s$ 矩阵 $E=|e_{ij}|_{s\times s}$ 称为由基本关连阵 $\bar{E}=|\bar{e}_{ij}|_{s\times s}$ 生成的，如果 $\bar{e}_{ij}=0$ 保证 $e_{ij}=0$，且 $\forall i,j=1,2,\cdots,s$，e_{ij} 取值0或1，记为 $E\in\bar{E}$。$E=|e_{ij}|_{s\times s}$ 称为由基本关连阵 $\bar{E}$ 和某一给定的关连阵 $\hat{E}=|\hat{e}_{ij}|_{s\times s}$（即 $\forall i,j=1,2,\cdots,s$，$\hat{e}_{ij}=0$ 或 1）联合生成的，如果 $\bar{e}_{ij}=0$ 保证 $e_{ij}=0$，且 $\hat{e}_{ij}=1$ 保证 $e_{ij}=1$ 记为 $E\in\bar{E}-\hat{E}$。

定义6 (2.2)的平衡点 $x=0$ 称为关联（部分关联）

渐近稳定的，如果 $\forall E \in \bar{E}(\bar{E}-\hat{E})$，扰动后的系统$(2.2)_E$都是渐近稳定的。

如果记(2.2)为

$$\dot{x}_i = f_i(t; \bar{e}_{i1}x_1, \bar{e}_{i2}x_2, \ldots, \bar{e}_{is}x_s), \quad i=1,2,\ldots,s$$

那么$(2.2)_E$是指

$$\dot{x}_i = f_i(t; e_{i1}x_1, e_{i2}x_2, \ldots, e_{is}x_s), \quad i=1,2,\ldots,s$$

定义7 称n阶对称方阵A为严格协正的，如果 $\forall x \in R^n_+ \triangleq \{x \mid x \in R^n, x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T; x_i \geq 0, x \neq 0\}$，都有 $x^T A x \geq 0$。

下面我们列举 Lyapunov 第二定理和有关协正阵的一个有用的性质。

引理1[1] 对于系统(2.1)，如果存在定正函数 $V(x)$，使得 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2.1)}$(即V对系统(2.1)的全导数)定负(定正)，则(2.1)的平衡点 $x=0$ 是渐近稳定(不稳定的)。

引理2[8] 若矩阵A是严格协正的，且B的所有元素均非负，则A+B也是严格协正阵。

§3 大系统的稳定性分析

考虑由(2.2)描述的大系统

$$\dot{x}_i = f_i(t; x_1, x_2, \ldots, x_s), \quad i=1,2,\ldots,s \tag{3.1}$$

为了考虑平衡点 $x=0$ 的稳定性，我们取如下的矩阵形式的完全加权和V函数：

$$V(x)=[\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_s]\begin{bmatrix} V_{11}(x_1) & V_{12}(x_1,x_2) & \dots & V_{1s}(x_1,x_s)\\ V_{21}(x_2,x_1) & V_{22}(x_2) & \dots & V_{2s}(x_2,x_s)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ V_{s1}(x_s,x_1) & V_{s2}(x_s,x_2) & \dots & V_{ss}(x_s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\beta_i\beta_j V_{ij}(x_i,x_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}|\beta_i\beta_j|\,\mathrm{sign}(\beta_i\beta_j)V_{ij}(x_i,x_j) \qquad (3.2)$$

其中 $V_{ii}(x_i,x_i)\equiv V_{ii}(x_i)$，$\mathrm{sign}(\cdot)$为符号函数。如果存在严格正函数 $\varphi_i(x_i)$，$\varphi_i: R^{n_i}\to R^+\triangleq[0,+\infty)$，$\varphi_i(0)=0$，$i=1,2,\dots,s$，使得

$$\mathrm{sign}(\beta_i\beta_j)V_{ij}(x_i,x_j)\geq r_{ij}\varphi_i(x_i)\varphi_j(x_j)$$

$$i,j=1,2,\dots,s$$

则有

$$V(x)\geq\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}|\beta_i||\beta_j|\varphi_i(x_i)\varphi_j(x_j)r_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{2}(r_{ij}+r_{ji})(|\beta_i|\varphi_i(x_i))(|\beta_j|\varphi_j(x_j))$$

$$\triangleq\varphi^{*T}R\varphi^{*} \qquad (3.3)$$

其中 $\varphi^{*T}=[|\beta_1|\varphi_1(x_1),|\beta_2|\varphi_2(x_2),\dots,|\beta_s|\varphi_s(x_s)]$ 是正向量，$R=[r_{ij}^{*}]_{s\times s}$ 是 $s\times s$ 矩阵，$r_{ij}^{*}=\frac{1}{2}(r_{ij}+r_{ji})$，$i,j=1,2,\dots,s$。

考虑 $V(x)$ 对（3.1）的全导数

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(3.1)}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}\beta_i\beta_j\left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_j}\dot{x}_j\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\beta_i^2\nabla V_{ii}^{T}(\ \ )\dot{x}_i$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\beta_i^2\nabla V_{ii}^{T}(x_i)f_i(t;x_1,x_2,\cdots,x_s)$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}\beta_i\beta_j\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_i}f_i(t;x_1,x_2,\cdots,x_s)$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}\beta_i\beta_j\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_j}f_j(t;x_1,x_2,\cdots,x_s)$$

如果存在严格正函数 $W_i(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 和 s^2 个 $s\times s$ 对称矩阵 B_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,s,\ i\neq j)$，使得

$$\beta_i^2\nabla V_{ii}^{T}(x_i)f_i(t;x_1,x_2,\cdots,x_s)\leq -w^{T}B_{ii}w$$

$$\beta_i\beta_j\left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_i}f_i(t,x)+\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_j}f_j(t,x)\right)\leq -w^{T}B_{ij}w\quad i\neq j$$

$$i,j=1,2,\cdots,s$$

其中 $w(x)=|W_1(x_1),W_2(x_2),\cdots,W_s(x_s)|^{T}$ 是正向量。则有

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(3.1)}\leq-\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}w^{T}B_{ij}w$$

$$=-w^{T}\Big(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}B_{ij}\Big)w\triangleq-w^{T}Sw \qquad (3.4)$$

其中 $S=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}B_{ij}$ 是 $s\times s$ 对称矩阵。

于是我们有如下的定理：

定理1　对于系统（3.1），如果存在形如（3.2）的函数 $V(x)$，使得估计式（3.3）中的 R 和（3.4）中的 S 均为严

格协正的，则其平衡点 $x=0$ 是渐近稳定的。

证明 取 $V(x)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\beta_i\beta_j V_{ij}(x_i,x_j)$

(i) 由于 $V(x)\geq \varphi^{*T}R\varphi^*$，而 φ^* 为正向量，R为严格协正的，则 $V(x)$ 为定正函数。

(ii) 由于 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3.1)}\leq -W^TSW$，W为正向量，S为严格协正的，则 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3.1)}$ 为定负函数。

由引理1，故(3.1)的平衡点 $x=0$ 是渐近稳定的。证毕。

例1 考虑系统

$$\dot{x}_1=x_2 \qquad (3.5)_1$$

$$\dot{x}_2=-x_1^3-x_2 \qquad (3.5)_2$$

其中第一个孤立子系统

$$\dot{x}_1=0$$

是一个退化系统，我们取它的"伪"Lyapunov 函数 $V_{11}(x_1)=x_1^2+x_1^4$，第二个孤立子系统

$$\dot{x}_2=-x_2$$

是渐近稳定的，我们取它的 Lyapnnov 函数 $V_{22}(x_2)=x_2^2$。如果用加权和V函数方法，取(3.5)的V函数 $V(x_1,x_2)=\alpha_1(x_1^2+x_1^4)+\alpha_2x_2^2$，$\alpha_1,\alpha_2$ 为正常数，则

$$\left.\frac{dV(x_1,x_2)}{dt}\right|_{(3.5)}=2\alpha_1(x_1+2x_1^3)x_2+2\alpha_2x_2(-x_1^3-x_2)$$

$$=2\alpha_1x_1x_2+(4\alpha_1-2\alpha_2)x_1^3x_2-2\alpha_2x_2^2$$

一般说来，我们无法通过选取 α_1,α_2 来保证 $\frac{dV}{dt}$ 的定负性，

从而很难判定（3.5）的稳定性。如果我们使用本文的方法，取 $V_{12}(x_1,x_2)=V_{21}(x_1,x_2)=x_1x_2$，$\beta_1=\frac{1}{2}$，$\beta_2=1$，则

$$V(x)=\left|\frac{1}{2},1\right|\begin{vmatrix}x_1^2+x_1^4 & x_1x_2\\ x_1x_2 & x_2^2\end{vmatrix}\begin{Vmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{Vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}x_1^4+\frac{1}{2}x_1^2+x_1x_2+x_2^2$$

是定正的，且

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(3.5)}=(2x_1^3+x_1+x_2)x_2+(x_1+2x_2)(-x_1^3-x_2)$$

$$=-x_1^4-x_2^2$$

是定负的，故（3.5）的平衡解是渐近稳定的。这个例子说明，本文采用的方法确实要比加权和V函数方法灵活。

例2（飞机的纵向运动）。飞机的受控纵向运动可由如下的方程表示：

$$\dot{x}_k=-\rho_kx_k+\sigma,\quad k=1,2,3,4$$

$$\dot{\sigma}=\sum_{k=1}^{4}\beta_kx_k-rp\sigma-f(\sigma) \qquad (3.6)$$

其中 $\rho_k>0$，$r>0$，$p>0$，β_k 是常数，f 是满足如下条件的函数：（i）f 在 R 上是连续的；（ii）$f(\sigma)=0$ 当且仅当 $\sigma=0$；（iii）对所有的 $\sigma\neq0$，$\sigma f(\sigma)>0$。满足上面条件的函数称为可允非线性。如果对任意可允非线性其平衡点都是渐近稳定的，则称系统是绝对稳定的。

为了考察（3.6）的平衡点的稳定性，我们把（3.6）分解成如下二个子系统的耦合形式：

$$\dot{x}_k=-\rho_kx_k,\quad k=1,2,3,4 \qquad (3.7)$$

$$\dot{\sigma} = -rp\sigma - f(\sigma) \tag{3.8}$$

对（3.7），我们取其 Lyapunov 函数

$$V_{11} = (2+\alpha)\sum_{i=1}^{4}\frac{\beta_i^2}{\rho_i}x_i^2 ,\quad \alpha \geq 0 \text{ 常数}$$

对（3.8），我们取其 Lyapunov 函数

$$V_{22} = \left(\sum_{i=1}^{4}\rho_i + d\right)\sigma^2 + \int_0^{\sigma} f(\tau)d\tau ,\quad d \geq 0 \text{ 常数}$$

考虑到关连的影响，我们再取

$$V_{12} = V_{21} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\beta_i x_i \sigma$$

取 $\beta_1 = \beta_2 = 1$，由（3.2），系统的 V 函数取为

$$V(x) = \begin{vmatrix} 1, 1 \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} (2+\alpha)\sum_{i=1}^{4}\frac{\beta_i^2}{\rho_i}x_i^2 & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\beta_i x_i \sigma \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\beta_i x_i \sigma & \left(\sum_{i=1}^{4}\rho_i + d\right)\sigma^2 + \int_0^{\sigma} f(\tau)d\tau \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2+\alpha)\sum_{i=1}^{4}\frac{\beta_i^2}{\rho_i}x_i^2 + \sum_{i=1}^{4}\beta_i x_i \sigma + \left(\sum_{i=1}^{4}\rho_i + d\right)\sigma^2 + \int_0^{\sigma} f(\tau)d\tau \tag{3.9}$$

由于 $V(x) \geq \frac{7}{4}\sum_{i=1}^{4}\frac{\beta_i^2}{\rho_i}x_i^2 + d\sigma^2$，从而 $V(x)$ 是定正函数。

考虑 $V(x)$ 对（3.6）的全导数

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(3.6)} = \sum_{i=1}^{4}(4+2\alpha)\frac{\beta_i^2}{\rho_i}x_i + \beta_i\sigma)(-\rho_i x_i + \sigma)$$

$$+\left[\sum_{i=1}^{4}\beta_i x_i + 2\left(\sum_{i=1}^{4}\rho_i + d\right)\sigma + f(\sigma)\right]\left[\sum_{i=1}^{4}\beta_i x_i - rp\sigma - f(\sigma)\right]$$

$$\triangleq D_1 + D_2$$

直接计算，我们有

$$D_1 = -(4+2a)\sum_{i=1}^{4}\beta_i^2 x_i^2 + \alpha^2 \sum_{i=1}^{4}\beta_i + \sum_{i=1}^{4}\left[(4+2a)\frac{\beta_i^2}{\rho_i} - \beta_i\rho_i\right]x_i\alpha$$

$$D_2 \leq 4\sum_{i=1}^{4}\beta_i^2 x_i^2 - 2\gamma p\left(\sum_{i=1}^{4}\rho_i + d\right)\alpha^2 + \left[2\left(\sum_{i=1}^{4}\rho_i + d\right) - \gamma p\right]\alpha\sum_{i=1}^{4}\beta_i x_i$$

于是

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(3.6)} \leq -2a\sum_{i=1}^{4}\beta_i^2 x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{4}\beta_i - 2\gamma p\left(\sum_{i=1}^{4}\rho_i + d\right)\right)\alpha^2 + \sum_{i=1}^{4}\beta_i x_i \alpha\left[(4+2a)\frac{\beta_i}{\rho_i} - \rho_i - \gamma p + 2\left(\sum_{i=1}^{4}\rho_i + d\right)\right]$$

记 $B_i = (4+2a)\dfrac{\beta_i}{\rho_i} - \rho_i - \gamma p + 2\left(\sum_{i=1}^{4}\rho_i + d\right)$

则有

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(3.6)} \leq -2a\sum_{i=1}^{4}\left(\beta_i x_i - \frac{B_i}{4a}\alpha\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{4}\beta_i - 2\gamma p\left(\sum_{i=1}^{4}\rho_i + d\right) + \frac{1}{8a}\sum_{i=1}^{4}B_i^2\right)\alpha^2$$

于是（3.6）在满足下面条件时是绝对稳定的：

$$\sum_{i=1}^{4}\beta_i - 2\gamma p\left(\sum_{i=1}^{4}\rho_i + d\right) + \frac{1}{8a}\sum_{i=1}^{4}B_i^2 < 0 \qquad (3.10)$$

把 $\frac{1}{8a}\sum_{i=1}^{4}B_i^2$ 看成是 α 的函数，可以知道它在正半实轴上有极

小点 $a_0=\frac{1}{2}\left(A_\varepsilon/\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\beta_i}{\rho_i}\right)^2\right)^{1/2}$，其中

$$A_\varepsilon=\sum_{i=1}^{4}\left[\frac{4\beta_i}{\rho_i}-\gamma p+2\left(\sum_{i=1}^{4}\rho_i+\alpha\right)-\rho_i\right]^2 \qquad (3.11)$$

我们再把 $-2\gamma p\alpha+\frac{1}{8a_0}\sum_{i=1}^{4}B_i^2(a_0)$ 看作 α 的函数求极小值，记为 $S(a_0,\alpha_0)$，于是(3.6)的稳定性条件为

$$\sum_{i=1}^{4}\beta_i-2\gamma p\sum_{i=1}^{4}\rho_i+S(a_0,\alpha_0)<0 \qquad (3.12)$$

文〔7〕考虑了(3.6)的结构性质，采用加权和V函数，得到一个比较不保守的稳定性条件：

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\beta_i}{\rho_i}-\gamma p\le 0 \qquad (3.13)$$

这是文献中比较好的结果。两式相比较可以看出，在某些条件下（如 $S(a_0,\alpha_0)-\gamma p\sum_{i=1}^{4}\rho_i<0$），本文得到的结果(3.12)确比(3.13)要好。对 $S(a_0,\alpha_0)$ 作一仔细的分析就可看出，一般来说，我们甚至有 $S(a_0,\alpha_0)\le 0$。本例说明，使用本文的方法分析具体的例子，确实可以得到较为不保守的稳定性判据。

如果把(3.1)看成一个非线性系统，则(3.2)仅仅是一种特殊形式的V函数，所有经典的稳定性结果都可以并行推过来，但我们主要是把(3.1)看成一个由S个子系统耦合而成的大系统，考虑使用这种特殊形式的Lyapunov函数对大系统稳定性分析的灵活性。

考虑如下的线性大系统

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{S}A_{ij}x_j,\quad i=1,2,\dots,S \qquad (3.14)$$

在（3.2）中我们取 $V_{ij}(x_i, x_j)=x_i^T P_{ij} x_j$，$i, j=1, 2, \cdots, s$，于是

$$V(x)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\beta_i\beta_j x_i^T P_{ij} x_j \tag{3.15}$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}|\beta_i\beta_j|\,\mathrm{sign}(\beta_i\beta_j)\, x_i^T P_{ij} x_j$$

$$\geqslant p^T(x) R\, p(x) \tag{3.16}$$

其中 P_{ij} 是 $n_i\times n_j$ 矩阵（$i\neq j$，$i, j=1, 2, \cdots, s$），P_{ii} 是 $n_i\times n_i$ 对称矩阵，且

$$p(x)=\big|\,|\beta_1|\,\|x_1\|, |\beta_2|\,\|x_2\|, \cdots, |\beta_s|\,\|x_s\|\,\big|^T$$

$$R=|r_{ij}|_{s\times s},\quad r_{ij}=\frac{1}{2}\left[\lambda_{min}^{1/2}(P_{ij}^T P_{ij})+\lambda_{min}^{1/2}(P_{ji}^T P_{ji})\right],$$

$i\neq j$，$i, j=1, 2, \cdots, s$，$r_{ii}=\lambda_{min}(P_{ii})$，$i=1, 2, \cdots, s$，此时有

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3.14)}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\beta_i\beta_j(\dot{x}_i^T P_{ij} x_j+x_i^T P_{ij}\dot{x}_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\beta_i\beta_j\Big[\Big(\sum_{k=1}^{s}A_{ik}x_k\Big)^T P_{ij} x_j+$$

$$+x_i^T P_{ij}\Big(\sum_{k=1}^{s}A_{jk}x_k\Big)\Big]$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}x_i^T\Big[\sum_{k=1}^{s}(\beta_k\beta_j A_{ki}^T P_{kj}+$$

$$+\beta_i\beta_k P_{ik}A_{kj})\Big]x_j$$

$$\triangleq\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}x_i^T F_{ij} x_j \tag{3.17}$$

在 $s=2$ 时，我们有

$$F_{11}=\beta_1^2(A_{11}^TP_{11}+P_{11}A_{11})+\beta_1\beta_2(P_{12}A_{21}+A_{21}^TP_{12}^T) \quad (3.18)_1$$

$$F_{12}=\beta_1\beta_2A_{11}^TP_{12}+\beta_1^2P_{11}A_{12}+\beta_2^2A_{21}^TP_{22}+\beta_1\beta_2P_{12}A_{22} \quad (3.18)_2$$

$$F_{21}=\beta_1^2A_{12}^TP_{11}+\beta_1\beta_2P_{21}A_{11}+\beta_1\beta_2A_{22}^TP_{21}+\beta_2^2P_{22}A_{21} \quad (3.18)_3$$

$$F_{22}=\beta_2^2(A_{22}^TP_{22}+P_{22}A_{22})+\beta_1\beta_2(A_{12}^TP_{12}+P_{12}^TA_{12}) \quad (3.18)_4$$

我们记 $S_{ij}=-\lambda_{max}^{1/2}(F_{ij}^TF_{ij})-\lambda_{max}^{1/2}(F_{ji}^TF_{ji})$，$i\neq j$

$S_{ii}=-2\lambda_{max}(F_{ii})$，$i, j=1, 2, \cdots, s$

$S=|S_{ij}|_{s\times s}$

$h_{ij}=\frac{1}{2}[\lambda_{min}^{1/2}(F_{ij}^TF_{ij})+\lambda_{min}^{1/2}(F_{ji}^TF_{ji})]$，$i\neq j$

$h_{ii}=\lambda_{min}(F_{ii})$，$i, j=1, 2, \cdots, s$

$H=|h_{ij}|_{s\times s}$

则有如下的定理：

定理2　对于系统（3.14），如果存在（3.15）中的 P_{ij}（$i,j=1,2,\cdots,S$），使估计式（3.16）中的 R 是尹格协正的，则（i）若 S 是尹格协正的，则（3.14）的平衡点是渐近稳定的；（ii）若 H 为尹格协正的，则（3.14）的平衡点是不稳定的。

证明　由（3.15），（3.16）和 R 的尹格协正性，我们知道 $V(x)$ 是定正的。

（i）由于 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3.14)}\leq-\frac{1}{2}\xi^T(x)S\xi(x)$，其中 $\xi(x)=|\|x_1\|, \|x_2\|, \cdots, \|x_s\||^T$，而 S 是尹格协正的，故 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3.14)}$