厦门大学硕士研究生毕业论文

分散控制系统扰动解耦问题

系（所、室）：计算机与系统科学系

专　　　业：运筹学与控制论

研 究 方 向：大系统理论及应用

研究生姓名：俞　玉　敏

指 导 教 师：贺 建 勋 教 授

一九八八年六月

分散控制系统扰动解耦问题

俞 玉 敏

摘 要

本文直接用矩阵语言描述分散控制系统扰动解耦问题。给出了一般分散控制系统扰动可解耦的充要条件，构造了一组方程，系统扰动可解耦的充要条件是方程组有解；且当系统是扰动可解耦时，由方程组的解可直接得到实现扰动解耦所需的分散反馈增益阵。

一、引 言

大系统理论是基于基础科学和工程技术之间的一门技术科学，它是应现代生产力高度发展需要而产生的。交通系统、通讯系统、电力系统、人口系统、社会经济系统等々，结构复杂，地理分布广，子系统众多，用常规方法是很难解决它们，因此就需要一门新的技术科学——大系统理论来解决它们。大系统理论自出现二十多年以来，在理论上和应用上都得到很大的发展，出现了很多分支[15]、[16]，主要有：①大系统的建模；②大系统的结构分析；③大系统的模型简化；④大系统的稳定性分析与镇定；⑤大系统的递阶控制与优化；⑥大系统的分散

控制；⑦多目标决策和优化理论；⑧大系统的计算机辅助设计；专家系统，等等。

大系统的分散控制主要包括二个部分：①分散固定模问题；②分散扰动解耦问题。固定模问题的研究到目前为止已作出很多工作，有不少文章解决固定模中的各个问题，取得了一些比较完善的结果[17]－[23]。

扰动解耦问题是最近十多年来研究的一个新课题。在设计一个控制系统时，必须要知道系统是否能够抗干扰，如果所设计的系统是不能抗干扰的，也即不能扰动解耦的，那末系统就会失真，因此研究扰动解耦问题在多变量控制系统中具有重要意义。在这方面的最早工作是 Wonham 与 Morse，他们在[1]中首先研究了集中系统的扰动解耦问题，提出了（A，B）——不变子空间的概念。Wonham 在以后几年内又在这方面做了不少工作，提出了构造（A、B）——不变子空间的算法[2]，因此集中系统扰动解耦问题已经得到比较完满的解决。1975年，Hamano 与 Furuta [3] 把此结果推广到具有二个通道的分散控制系统，给出了控制系统扰动可解耦的一个充要条件；Mooy 与 Cury 在[4]中指出[3]中的定理 2.1 的充分性证明是错的，并给出一个反例。其实[3]中的定理 2.1 的充分性证明的主要思想是对的，倒是[4]中的反例是不恰当的。Cury et.al 在[5]中研究具有 N 通道的扰动解耦问题，提出 S－（A、B）——不变子空间的概念，由此给出系统扰动可解耦的一个充要条件，遗憾的是其主要结果是错的[6]；Leite 在[7]、[8]文章中研究带有一般信息约束的一般分散控制系统的扰动解耦问题，提出 K－（A, B_i, S_i）——不变子空间的概念，由此给出主要结果定理1，遗憾的是文章中的几个主要引理，引理 A_1、引理 A_2、推论 A_1 都是错的，导致其主要结果定理1也是错的[6]；

胡世才与郑毓蕃在[6]中指出在二通道下文章[7]的结果是对的，在多于二通道下文章[5]、[7]中的主要结果都是错的，并提出一个强可分解的概念，在分散信息组满足强可分解条件下，给出了分散控制系统扰动可解耦的一个充要条件。上面是目前已发表的主要文章，都是用几何语言叙述并解决的。到目前为止，还没有给出在无附加条件约束下的分散控制系统扰动可解耦的充要条件，致于如何给出算法来解决，对一般分散系统几乎还没有线索。

对于用矩阵语言来叙述或解决的扰动解耦问题，韩京清与许可康[9]及陈树中与郑毓蕃[10]直接用初等坐标变换的方法解决了集中系统的扰动解耦问题。但是对于带有信息约束的集中系统或对于一般分散系统，这种方法还没有得到推广。

本文直接用矩阵语言来叙述并解决一般分散系统的扰动解耦问题。构造出一个方程组，一般分散系统扰动可解耦的充要条件就是这个方程组有解；并由这个方程组的解可求出 $N-(A, B_i, \varphi_i)$ —— 不变子空间及极大 N —— (A, B_i, φ_i) —— 不变子空间；且当分散系统是扰动可解耦时，由方程组解中可求得实现扰动解耦的反馈增益阵。这样，就对一般分散控制系统的扰动解耦问题在应用上得到了初步的结果和线索，并在理论上得到了系统扰动可解耦的一个充要条件。方程组中 $\bar{M}$、$\bar{V}$ 的构造，对带状态反馈的分散系统和带输出反馈的分散系统是一致的，并同分散信息约束 $\{\varphi_i, i\in \underline{N}\}$ 没有直接联系，所以有希望构造一个对一般分散系统通用的算法。文章分五部分：第一部分为引论；第二部分为带状态反馈的分散系统扰动解耦，给出文章主要结果；第三部分为带输出反馈的分散系统扰动解耦，相应给出几个重要定理；第四部分是将获得的结果应用到分散控制系统的输出分解问题上，得到一些结果；第五部分为后述。

在文章中还给出几个例子来说明一些主要定理。

二、状态反馈的分散系统扰动解耦

考虑分散控制系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{N} B_i u_i + Fq(t), \\ y = Cx. \end{cases} \tag{1}$$

其中N为控制站数，x为状态变量，u_i为第i个控制站的控制变量，y为输出变量，$q^{(t)}$为扰动项，A、B_i、F及C为矩阵，$x \in R^n$，$u_i \in R^{s_i}$，$y \in R^p$，$q \in R^{r_1}$，F的列向量组线性无关，C的行向量组线性无关。

分散系统的控制由

$$u_i = F_i x \qquad i = 1, 2, \cdots, N, \tag{2}$$

其中F_i为$s_i \times n$维矩阵。

给定的信息约束

$$F_i \varphi_i = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, N, \tag{3}$$

其中φ_i为R^n中给定的子空间。

定义1　若存在满足信息约束（3）的分散控制（2），使得

$$\langle A + \sum_{i=1}^{N} B_i F_i \mid \mathrm{Im} F \rangle \subset \mathrm{Ker} C \tag{4}$$

那末称系统（1）在信息约束（3）下是扰动可解耦的。

定义2　给定R^n中子空间V，若存在满足（3）的矩阵F_i

（$i=1,2,\cdots,N$），使得

$$(A+\sum_{i=1}^{N}B_iF_i)V\subset V\text{，}\qquad(5)$$

那末称 V 为 $N-(A,B_i,\varphi_i)$— 不变子空间。

定理1　分散控制系统（1）在信息约束（3）下扰动可解耦的充要条件为存在一个 $N-(A,B_i,\varphi_i)$— 不变子空间 V，满足 $I_mF\subset V\subset KerC$。

证明　充分性，若存在一个 $N-(A,B_i,\varphi_i)$— 不变子空间 V，满足 $I_mF\subset V\subset KerC$，那末存在矩阵 F_i，$F_i\varphi_i=0$，$i=1,2,\cdots,N$，满足

$$(A+\sum_{i=1}^{N}B_iF_i)V\subset V\text{，}$$

所以 $\langle A+\sum_{i=1}^{N}B_iF_i|I_mF\rangle\subset V\subset KerC$，

系统（1）在信息约束（3）下是扰动可解耦的。

必要性，若系统（1）在信息约束（3）下是扰动可解耦的，那末存在满足信息约束（3）的分散控制，使得

$$\langle A+\sum_{i=1}^{N}B_iF_i|I_mF\rangle\subset KerC\text{。}$$

取　$V=\langle A+\sum_{i=1}^{N}B_iF_i|I_mF\rangle$，

得　$(A+\sum_{i=1}^{N}B_iF_i)V\subset V$，$I_mF\subset V\subset KerC$，

故 V 为 $N-(A,B_i,\varphi_i)$— 不变子空间，满足 $I_mF\subset V$

$\subset Kerc$，证毕。

定义3　给定矩阵M、V，分别为 $l' \times n$ 维和 $n \times l''$ 维矩阵，如果 $MV=0$，那末称矩阵M是矩阵V的左零矩阵，称矩阵V是矩阵M的右零矩阵。

定义4　给定矩阵M、V，分别为 $l' \times n$ 维和 $n \times l''$ 维矩阵，如果 $MV=0$，且 $rank(M)+rank(V)=n$，那末称M是V的最大左零矩阵，V是M的最大右零矩阵。

引理1　设矩阵 M_1 是矩阵V的左零矩阵，矩阵M是矩阵V的最大左零矩阵，那末矩阵 M_1 的行向量组可由矩阵M的行向量组线性表出。

证明　设矩阵M的行向量组为 $m_1', \cdots, m_l'$，矩阵 M_1 的行向量组为 $m_1'', \cdots, m_{l_1}''$，线性方程组 $mV=0$（m 为 n 维行向量）的解空间为 B，因为 $M_1V=0$，$MV=0$，所以 $m_1' \cdots, m_l'$ 及 $m_1'', \cdots, m_{l_1}''$ 都是解空间 B 中的一组向量。又 $rank(M)+rank(V)=n$，则向量组 $m_1', \cdots, m_l'$ 和解空间 B 的基等价，所以 $m_1'', \cdots m_{l_1}''$ 可由 $m_1', \cdots, m_l'$ 线性表出，证毕。

引理2　设矩阵M是矩阵V的最大左零矩阵，矩阵 M_1 的行向量组可由矩阵M的行向量组线性表出，那末 $M_1V=0$。

证明　因为矩阵 M_1 的行向量组可由矩阵M的行向量组线性表出，所以存在一矩阵 L，使得 $M_1=LM$，再由 $MV=0$ 可得 $LMV=0$，则 $M_1V=0$，证毕。

引理3　设矩阵 V_1 是矩阵M的右零矩阵，矩阵V是矩阵M的最大右零矩阵，那末矩阵 V_1 的列向量组可由矩阵V的列向量组线性表出。

可仿照引理1证明之，在此略去。

引理4　设矩阵V是矩阵M的最大右零矩阵，矩阵 V_1 的

列向量组可由矩阵V的列向量组线性表出，那末$MV_1=0$。

可仿照引理2证明之，在此略去。

令$l_i=dim(\varphi_i)$，$i=1,2,\cdots,N$，取于空间φ_i中一组基$\varphi_{i1},\cdots,\varphi_{il_i}$，$i=1,2,\cdots,N$，作矩阵

$$\Phi_i=(\varphi_{i1},\cdots,\varphi_{il_i}),\quad i=1,2,\cdots,N。\qquad (6)$$

定理2　系统(1)在信息约束(3)下扰动可解耦的充要条件为存在一矩阵$\bar{M}$（不妨设$\bar{M}$是行线性无关的），满足

①、C的行向量组可由$\bar{M}$的行向量组线性表出；

②、$\bar{M}F=0$；

③、下列线性方程组有解F_i $(i=1,2,\cdots,N)$：

$$\begin{cases}\bar{M}(A+\sum_{i=1}^{N}B_iF_i)\bar{V}=0,\\ F_i\Phi_i=0,\quad i=1,2,\cdots,N\end{cases}\qquad (7)$$

其中$\bar{V}$是$\bar{M}$的最大右零矩阵（不妨设$\bar{V}$是列线性无关的）。

证明　充分性，假定存在一矩阵$\bar{M}$满足上述条件①、②、③。记子空间$\bar{\mathcal{V}}=I_m\bar{V}$，因为$\bar{V}$是$\bar{M}$的最右零矩阵，所以$\bar{M}$是$\bar{V}$的最大左零矩阵。由条件①及引理2知$C\bar{\mathcal{V}}=0$，即$\bar{\mathcal{V}}=Ker C$；由条件②知矩阵$F$是矩阵$\bar{M}$的一个右零矩阵，再由引理3知$F$的列向量组可由$\bar{V}$的列向量组线性表出，则$I_mF\subset I_m\bar{V}=\bar{\mathcal{V}}$；由条件③知矩阵$(A+\sum_{i=1}^{N}B_iF_i)\bar{V}$是矩阵$\bar{M}$的一个右零矩阵，再由引理3知$(A+\sum_{i=1}^{N}B_iF_i)\bar{V}$的列向量组可由$\bar{V}$的列向量组线性表出，则$I_m[(A+\sum_{i=1}^{N}B_iF_i)\bar{V}]\subset I_m\bar{V}$，$(A+\sum_{i=1}^{N}B_iF_i)\bar{\mathcal{V}}\subset\bar{\mathcal{V}}$；又从$F_i\Phi_i=0$得

$F_i\varphi_i=0$，所以子空间$\bar{V}$是$N-(A, B_i, \varphi_i)$一不变子空间，且满足$I_m F \subset \bar{V} \subset Ker c$，故根据定理1知系统（1）在信息约束（3）下是扰动可解耦的。

必要性，假定系统（1）在信息约束（3）下是扰动可解耦的，那末存在一子空间$\bar{V}$及存在带有信息约束（3）的分散控制口(2)，使得

$$(A+\sum_{i=1}^{N} B_i F_i)\bar{V} \subset \bar{V}, \; I_m F \subset \bar{V} \subset Ker c, \; F_i\varphi_i=0, \; i=1,2,\cdots,N。$$

作矩阵$\bar{V}$，满足$I_m\bar{V}=\bar{V}$，求得矩阵$\bar{V}$的最大左零矩阵$\bar{M}$。

由$(A+\sum_{i=1}^{N} B_i F_i)\bar{V} \subset \bar{V}$得

$I_m[(A+\sum_{i=1}^{N} B_i F_i)\bar{V}] \subset I_m\bar{V}$，则$(A+\sum_{i=1}^{N} B_i F_i)\bar{V}$的列向量组可由$\bar{V}$的列向量组线性表出，再由引理4知$\bar{M}(A+\sum_{i=1}^{N} B_i F_i)\bar{V}=0$；由$I_m F \subset \bar{V}$得$I_m F \subset I_m \bar{V}$，则矩阵$F$的列向量组可由矩阵$\bar{V}$的列向量组线性表出，再由引理4知$\bar{M}F=0$；由$\bar{V} \subset Ker c$得$c\bar{V}=0$，再由引理1知矩阵$c$的行向量组可由$\bar{M}$的行向量组线性表出，所以存在$\bar{M}$满足条件①、②、③，证毕。

例1　考虑分散控制系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}u_1+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}u_2+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u_3+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}q^{(t)},$$

$$y=(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

信息约束

$$\varphi_1=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\},\quad \varphi_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\},\quad \varphi_3=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\},$$

判断此系统在信息约束下是否扰动可解耦？

解 取矩阵$\bar{M}=(0\ \ 0\ \ 1)$，那末$\bar{M}$满足定理2的充分条件：

①. 显然C的行向量可由$\bar{M}$的行向量线性表出；

②. $\bar{M}F=(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0$；

③. 取$\bar{M}$的最大右零矩阵$\bar{V}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$，从而可得方程组(7)

有解 $F_1=(1,0,0)$，$F_2=(1,1,-1)$，$F_3=(0,0,1)$。

取一子空间

$$\bar{V}=I_m\bar{V}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\},$$

取反馈增益阵

$F_1=(1,0,0)$，$F_2=(1,1,-1)$，$F_3=(0,0,1)$，

那末 $(A+\sum_{i=1}^{3}B_iF_i)\bar{V}\subset\bar{V}$, $F_i\varphi_i=0$, $i=1,2,3$,

且 $I_mF\subset\bar{V}\subset Kerc$，所以此系统是扰动可解耦的。

作矩阵 $B=[B_1B_2\cdots B_N]$, (8)

那末包含在 $Kerc$ 中的 (A,B) — 不变子空间的最大元

$V^*=SupJ(A,B,Kerc)$, (9)

其中 $J(A,B,Kerc)=\{V: AV\subset V+I_mB, V\subset Kerc\}$。

最大元 V^* 可由文献[2]的标法求得。

引理5 $Kerc$ 中的子空间 V 是 $N-(A,B_i,\varphi_i)$ — 不变子空间的一个必要条件为 $V\subset V^*$。

证明 若 $Kerc$ 中的子空间 V 是 $N-(A,B_i,\varphi_i)$ — 不变子空间，那末存在满足信息约束(3)的反馈矩阵 F_i $(i=1,2,\cdots,N)$，使得 $(A+\sum_{i=1}^{N}B_iF_i)V\subset V$。

令 $\hat{F}=\begin{pmatrix}F_1\\ \vdots\\ F_N\end{pmatrix}$,

那末 $(A+B\hat{F})V\subset V$，所以 V 是 (A,B) — 不变子空间，又 $V\subset Kerc$，故 $V\subset V^*$，证毕。

根据定理1和引理5可知，系统(1)在信息约束(3)下扰动可解耦的必要条件是 $I_mF\subset V^*$，所以下面不妨设 $I_mF\subset V^*$。

记矩阵 F 的列向量组为 $v_1, v_2, \cdots, v_{r_1}$，把其扩展成 V^* 中的一组基 $v_1, v_2, \cdots, v_{r_1}, v_{r_1+1}, \cdots, v_{r_1+T}$，这里 $T=dim(V^*)$

$-\operatorname{rank}(F)$。

记矩阵 $V^* = [v_1, \cdots, v_{r_1}, v_{r_1+1}, \cdots, v_{r_1+T}]$。 (10)

求 V^* 的最大左零矩阵 M_0（不妨设 M_0 是行线性无关的），记 M_0 的行向量组为 $m_1, m_2, \cdots, m_{r_2}$，这里 $r_2 = n - r_1 - T$。作矩阵

$$M^* = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{r_2} \\ m_{r_2+1} \\ \vdots \\ m_{r_2+T} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

使得 M^* 是矩阵 F 的最大左零矩阵。

作两个矩阵集合

$$\mathcal{U}^* = \left\{ \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{r_2} \\ m_{r_2+K_1} \\ \vdots \\ m_{r_2+K_T} \end{bmatrix} : \begin{array}{l} (K_1, K_2, \cdots, K_T) \text{为} \\ \text{自然数 } 1, 2, \cdots, T \\ \text{的一个排列。} \end{array} \right\} \tag{12}$$

$\mathcal{V}^* = \{[v_1, \cdots, v_{r_1}, v_{r_1+K_1}, \cdots, v_{r_1+K_T}]:(K_1, K_2, \cdots, K_T)$ 为自然数 $1, 2, \cdots, T$ 的一个排列$\}$。 (13)

显然 $\mathcal{U}^*$、$\mathcal{V}^*$ 两个矩阵集合都只有 $T!$ 个元素。

现在任意取定 $\bar{M}^*$、$\bar{V}^*$：

$$\bar{M}^* \in \mathcal{U}^*, \quad \bar{V}^* \in \mathcal{V}^*。 \tag{14}$$

引理6 矩阵 $\bar{M}^*$ 也是矩阵 F 的最大左零矩阵。

证明　因为 $\bar{M}^*$ 的行向量组可由 M^* 的行向量组线性表出，所以由引理2有 $\bar{M}^*F=0$，又 $\bar{M}^*$ 的行向量数同 M^* 的行向量数相等（都是线性无关的），即 $rank(\bar{M}^*)+rank(F)=n$，故 $\bar{M}^*$ 也是 F 的最大左零矩阵。证毕。

现在构造矩阵

$$M_X=\begin{bmatrix} I_{r_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_t & \bar{A} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$V_\beta=\begin{bmatrix} I_{r_1} & 0 \\ 0 & I_{T-t} \\ 0 & \bar{B} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

其中 t 为一待定非负整数，$0\le t\le T$，I_{r_2}，I_{r_1}、I_t、I_{T-t} 分别为 $r_2\times r_2$、$r_1\times r_1$，$t\times t$、$(T-t)\times(T-t)$ 维的单位矩阵，$\bar{A}$、$\bar{B}$ 为待定矩阵，都是 $t\times(T-t)$ 维的。

作矩阵　$$\bar{M}=M_X\bar{M}^*, \tag{17}$$

$$\bar{V}=\bar{V}^*V_\beta\ 。 \tag{18}$$

定理3　在假定 $I_mF\subset V^*$ 下，系统(1)在信息约束(3)下扰动可解耦的充要条件是存在一非负整数 t，$0\le t\le T$，及存在 $\mathcal{M}^*$ 中一元素 $\bar{M}^*$，$\mathcal{V}^*$ 中一元素 $\bar{V}^*$，使得下面方程组有解 $\bar{A}$、$\bar{B}$ 及 F_j，$j=1,2,\cdots,N$，$\bar{A}$、$\bar{B}$ 都是 $t\times(T-t)$ 维待定矩阵：

$$\begin{cases} \bar{M}\bar{V}=0\ , \\ \bar{M}\ (A+\sum_{i=1}^{N}B_iF_i)\bar{V}=0\ , \\ F_j\Phi_j=0\ ,\ j=1,2,\cdots,N\ . \end{cases} \tag{19}$$

其中$\bar{A}$、$\bar{B}$分别含在$\bar{M}$、$\bar{V}$之中，$\bar{M}$、$\bar{V}$分别为（17）式、（18）式。

证明 充分性，假定存在一非负整数t，$0 \le t \le T$，及$\mathcal{M}^*$中一元素$\bar{M}^*$，$\mathcal{V}^*$中一元素$\bar{V}^*$，使得方程组（19）有解$\bar{A}$、$\bar{B}$、F_j（$j=1,2,\cdots,N$）。

因为

$$rank(\bar{M}) = r_2 + t, \qquad rank(\bar{V}) = r_1 + T - t,$$

$$rank(\bar{M}) + rank(\bar{V}) = r_1 + r_2 + T = n,$$

所以$\bar{V}$是$\bar{M}$的最大右零矩阵，$\bar{M}$是$\bar{V}$的最大左零矩阵。

由方程组（19）有解F_j（$j=1,2,\cdots,N$）知方程组（7）有解F_j（$j=1,2,\cdots,N$）。

因为矩阵F的列向量组是矩阵$\bar{V}$的列向量组的一部分，所以由$\bar{M}\bar{V}=0$及引理4知$\bar{M}F=0$。

因为$I_m V^* \subset Ker C$，所以$CV^*=0$。又矩阵$M_0=\begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{r_2} \end{bmatrix}$是矩阵$V^*$的最大左零矩阵，所以由引理1知矩阵C的行向量组可由M_0行向量组$m_1,\cdots,m_{r_2}$线性表出，则矩阵C的行向量组可由矩阵$\bar{M}$的行向量组线性表出。

故矩阵$\bar{M}$满足定理2的充分性条件，系统（1）在信息约束（3）下是扰动可解耦的。

必要性，假定系统（1）在信息约束（3）下是扰动可解耦的，那末由定理2可知，存在一矩阵$\bar{M}_1$（不妨设$\bar{M}_1$的行向量组线性无关），满足

①、C的行向量组可由$\bar{M}_1$的行向量组线性表出；

②、$\bar{M}_1 F = 0$；

③、下列方程组有解F_j，$j=1,2,\cdots,N$

$$\begin{cases} \bar{M}_1(A+\sum_{i=1}^{N} B_i F_i)\bar{V}_1 = 0, \\ F_j \Phi_j = 0, \quad j=1,2,\cdots,N, \end{cases}$$

其中 $\bar{V}_1$ 是 $\bar{M}_1$ 的最大右零矩阵。

由定理2的充分性证明过程中可知 $Im\,\bar{V}_1$ 是一个 $N-(A, B_i, \varphi_i)$ 一不变子空间，满足

$$Im\,F \subset Im\,\bar{V}_1 \subset Ker\,C,$$

所以根据引理5知 $Im\,\bar{V}_1 \subset Im\,V^*$。

现在由上述条件②及引理1知，$\bar{M}_1$ 的行向量组可由 M^* 的行向量组线性表出，故可写 $\bar{M}_1$ 为：

$$\bar{M}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1,r_2+T} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_{r_2+t,1} & \cdots & a_{r_2+t,r_2+T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{r_2} \\ m_{r_2+1} \\ \vdots \\ m_{r_2+T} \end{pmatrix},$$

在这里令 $t = rank(\bar{M}_1) - r_2$。

因为 $rank(\bar{M}_1) \leqslant rank(M^*)$，$r_2+t \leqslant r_2+T$，所以 $t \leqslant T$；又因为 $Im\,\bar{V}_1 \subset Im\,V^*$，即 $\bar{V}_1$ 的列向量组可由 V^* 的列向量组线性表出，所以由引理4得

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{r_2} \end{bmatrix} \bar{V}_1 = 0,$$

故由引理2知行向量组 $m_1, m_2, \cdots, m_{r_2}$ 可由矩阵 $\bar{M}_1$ 的行向量组线性表出，从而 $rank(\bar{M}_1) \geqslant r_2$，$t \geqslant 0$，即 $0 \leqslant t \leqslant T$。

现在把 $m_1, m_2, \cdots, m_{r_2}$ 扩展成 $m_1, \cdots, m_{r_2}, m'_{r_2+1}, \cdots, m'_{r_2+t}$，使得矩阵 $\bar{M}_1$ 的行向量组和向量组 $m_1, \cdots, m_{r_2}, m_{r_2+1}, \cdots, m_{r_2+t}$ 等价，且 $m'_{r_2+1}, \cdots, m'_{r_2+t}$ 可由 $m_{r_2+1}, \cdots, m_{r_2+T}$ 线性表出，从而存在非奇异矩阵 L_1，使得

$$L_1\bar{M}_1 = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{r_2} \\ m'_{r_2+1} \\ \vdots \\ m'_{r_2+t} \end{pmatrix},$$

存在行线性无关矩阵 $\bar{A}_1$、$t\times T$ 维的，使得

$$\begin{pmatrix} m'_{r_2+1} \\ \vdots \\ m'_{r_2+t} \end{pmatrix} = \bar{A}_1 \begin{pmatrix} m_{r_2+1} \\ \vdots \\ m_{r_2+T} \end{pmatrix},$$

所以

$$L_1\bar{M}_1 = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{r_2} \\ m'_{r_2+1} \\ \vdots \\ m'_{r_2+t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r_2} & 0 \\ 0 & \bar{A}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{r_2} \\ m_{r_2+1} \\ \vdots \\ m_{r_2+T} \end{pmatrix}。$$

再由初等变换及矩阵 $\bar{A}_1$ 的行线性无关性可知，存在一可逆矩阵 L_2 及一可逆矩阵 L，L_2 为 $(r_2+t)\times(r_2+t)$ 维的，L 为 $(r_2+T)\times(r_2+T)$ 维的，及存在自然数 $1, 2, \cdots, T$ 的一个排列 $(K_1, K_2, \cdots, K_T)$，使得