第22卷 第3期　　厦门大学学报自然科学版　　Vol.22 No.3
1983年8月　　JOURNAL OF XIAMEN UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE)　　August 1983

解抛物型方程的一族绝对稳定的差分格式

陈传淡　　林　群

（数　学　系）

本文提出一族求解抛物型方程的三层含参数差分格式，能在随意选取非负有限参数偶的情形下保持稳定，且截断误差至少可达 $0(\Delta t^2)+0(\Delta x^4)$（特殊情况下还可提高）。这族格式概括了[1]及[2]中的部分结果。

§1. 差分格式的构造

考察一维抛物型方程的模型问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<\pi,\ t>0\\ u(x,0)=f(x),\ 0<x<\pi\\ u(0,t)=g_1(t),\ u(\pi,t)=g_2(t),\ t>0\end{cases}\tag{1}$$

其中 t 为时间变量，x 为空间变量，$u(x,t)$ 为微分方程(1)的解，而 $f(x)$，$g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 均为已知函数。

设 Δt 为时间步长，Δx 为空间步长。此时，$\Delta x=\pi/J$，这里 J 为区间 $[0,\pi]$ 的等分数。在 x,t 平面上的网格分布由 $x_j=j\Delta x$，$t_n=n\Delta t(j=0,1,2,\cdots,J;\ n=0,1,2,\cdots)$ 给出。令差分方程的解为 u_j^n 且 $\omega=\Delta t/\Delta x^2$，则三层含参数差分格式可写成：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{12\Delta t}\left[\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)u_{j+1}^{n+1}-2\alpha u_{j+1}^{n}+\left(\alpha-\dfrac{1}{2}\right)u_{j+1}^{n-1}\right]+\\ +\dfrac{5}{6\Delta t}\left[\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)u_j^{n+1}-2\alpha u_j^n+\left(\alpha-\dfrac{1}{2}\right)u_j^{n-1}\right]+\\ +\dfrac{1}{12\Delta t}\left[\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)u_{j-1}^{n+1}-2\alpha u_{j-1}^{n}+\left(\alpha-\dfrac{1}{2}\right)u_{j-1}^{n-1}\right]=\\ =\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\alpha+\beta\right)\dfrac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}+\\ +\left(\dfrac{1}{2}-2\beta\right)\dfrac{u_{j+1}^{n}-2u_j^{n}+u_{j-1}^{n}}{\Delta x^2}+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\alpha+\beta\right)\dfrac{u_{j+1}^{n-1}-2u_j^{n-1}+u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2}\\ u_j^0=f_j^0,\ u_0^n=g_1^n,\ u_J^n=g_2^n.\ (j=1,2,\cdots,J-1;\ n=0,1,2,\cdots)\end{cases}\tag{2}$$

差分格式(2)中的实参数偶(α,β)，我们总假定不取负值且是有界的。显然，由此参数偶(α,β)的不同选择，可获得不同形式的差分格式，但§2将证明这些格式总是稳定的。下面指出(2)式的几个特例：

特例1 取 $\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=0$ 及 $\alpha=1$，$\beta=\frac{1}{4}$，则由(2)式分别得到一个六点格式及一个九点格式：

$$\frac{1}{12}\cdot\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j+1}^{n}}{\Delta t}+\frac{5}{6}\frac{u_{j}^{n+1}-u_{j}^{n}}{\Delta t}+\frac{1}{12}\frac{u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^{n}}{\Delta t}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_{j}^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{u_{j+1}^{n}-2u_{j}^{n}+u_{j-1}^{n}}{\Delta x^2} \tag{3}$$

和
$$\frac{1}{12\Delta t}\left(\frac{3}{2}u_{j+1}^{n+1}-2u_{j+1}^{n}+\frac{1}{2}u_{j+1}^{n-1}\right)+\frac{5}{6\Delta t}\left(\frac{3}{2}u_{j}^{n+1}-2u_{j}^{n}+\frac{1}{2}u_{j}^{n-1}\right)+$$
$$+\frac{1}{12\Delta t}\left(\frac{3}{2}u_{j-1}^{n+1}-2u_{j-1}^{n}+\frac{1}{2}u_{j-1}^{n-1}\right)=\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_{j}^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \tag{4}$$

这便是[1]中指出的一对差分格式。

特例2 取 $\alpha=0$，$\beta=0$ 由(2)式导出：

$$\frac{1}{12}\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j+1}^{n-1}}{2\Delta t}+\frac{5}{6}\frac{u_{j}^{n+1}-u_{j}^{n-1}}{2\Delta t}+\frac{1}{12}\frac{u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^{n-1}}{2\Delta t}=$$
$$=\frac{1}{4}\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_{j}^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}+\frac{1}{2}\frac{u_{j+1}^{n}-2u_{j}^{n}+u_{j-1}^{n}}{\Delta x^2}$$
$$+\frac{1}{4}\frac{u_{j+1}^{n-1}-2u_{j}^{n-1}+u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} \tag{5}$$

这便是[2]中的结果。

另因参数偶(α,β)可随意选取，故(2)隐涵无穷多的差分格式。特别地，可令$\alpha=\lambda_n/(1+2\lambda_n)$，$\beta=0$。此时$0\leqslant\lambda_n\leqslant+\infty$。则当$\lambda_n$从0趋于$+\infty$时，格式(5)便连续地变动到(3)。

§2. 稳定性的研究

为分析差分格式(2)的稳定性，先叙述

引理 设$A>0$，则实系数二次方程$Ax^2+Bx+C=0$两根按模小于或等于1的充要条件是：

$$\text{(i)}\ A-C\geqslant0,\quad\text{(ii)}\ A+B+C\geqslant0,\quad\text{(iii)}\ A-B+C\geqslant0$$

现用谱波分析法证明差分格式(2)的绝对稳定性：

定理 设问题(1)是适定的，则对非负有界实参数偶(α,β)的任意选取，差分格式(2)均绝对稳定。

证明 依[1]中理论，格式(3)的传播矩阵是：

$$G(m,\Delta t)=\begin{bmatrix}-B/A & -C/A\\ 1 & 0\end{bmatrix} \tag{6}$$

其特征方程

$$A\lambda^2+B\lambda+C=0 \tag{7}$$

式中

$$A=2\cos m\Delta x\left[\frac{1}{12}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\alpha+\beta\right)\omega\right]+\left[\frac{5}{6}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\alpha+\beta\right)\omega\right]$$

$$B=-2\cos m\Delta x\left[\frac{1}{6}\alpha+\left(\frac{1}{2}-2\beta\right)\omega\right]-\left[\frac{5}{3}\alpha-(1-4\beta)\omega\right]$$

$$C=2\cos m\Delta x\left[\frac{1}{12}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha+\beta\right)\omega\right]+\left[\frac{5}{6}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha+\beta\right)\omega\right]$$

首先，考察稳定性的 Von Neumann 条件：

容易验证，对任意$\alpha\geqslant0$，$\beta\geqslant0$及$\omega>0$均有：

$$A=\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cos m\Delta x\right)+2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\alpha+\beta\right)(1-\cos m\Delta x)\omega\geqslant\frac{1}{3}>0$$

此外，我们不难算出：

(i) $A-C=\dfrac{1}{6}(5+\cos m\Delta x)+4\alpha\omega\sin^2\dfrac{m\Delta x}{2}\geqslant\dfrac{2}{3}>0$

(ii) $A+B+C=4\omega\sin^2\dfrac{m\Delta x}{2}\geqslant0$

(iii) $A-B+C=2\alpha\left(\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{3}\cos m\Delta x\right)+16\beta\omega\sin^2\dfrac{m\Delta x}{2}\geqslant0$

因此，由引理的结论知，特征方程(7)两根按模小于或等于1. 即对任意选择的$\omega>0$及参数偶(α,β) $(\alpha\geqslant0,\ \beta\geqslant0)$，Von Neumann 条件满足，稳定必要性得证。

其次，按 Richtmyer-Lax 第三，四充分条件[1]，分析稳定的充分性：

当 $C>-\dfrac{2}{9}$时，由$G(m,\Delta t)$得两特征值：

$$\lambda_{1,2}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

两特征向量：

$$x_{1,2}=W\begin{bmatrix}1\\ -B\mp\sqrt{B^2-4AC}\end{bmatrix}$$

其中 $W>0$ 为标准化因子. 于是

$$|\det(x_1,x_2)|=2W^2\sqrt{B^2-4AC}\geqslant 2W^2\sqrt{-4AC}>2W^2\sqrt{4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}}>\frac{4}{9}W^2>0$$

故依 Richtmyer-Lax 第三充分条件知，差分格式(2)是稳定的.

当　$C\geqslant-\frac{2}{9}$时，显然有：

$$A-C\geqslant\frac{2}{3}>\frac{1}{9}>0$$

及

$$A+C\geqslant\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}>0$$

从而

$$\left|\frac{C}{A}\right|\leqslant 1-\frac{1}{9A}$$

这里

$$\frac{2}{3}\leqslant 1-\frac{1}{9A}<1-\frac{1}{\nu[1+\alpha+\omega(1+2\alpha+4\beta)]}<1 \tag{8}$$

由于(α,β)是有界的，故依(8)式得：存在常数 $0<\gamma<1$，使 $|\lambda_1\lambda_2|=\left|\frac{C}{A}\right|<\gamma<$ <1. 即$|\lambda_1|$, $|\lambda_2|$ 中至少有一者 $\leqslant\delta<1$ (这里 $0<\delta<1$ 为常数). 这样，由Richtmyer-Lax 第四充分条件知，差分格式(2)亦稳定，稳定性获证.

此外，只要验明格式(2)的相容性，由 Lax 的等价性定理便可推得此格式的收敛性.

§3. 截断误差的讨论

常见的格式诸如 Laasonen, Crank-Nicholson 及 Du fort-Frankel 等格式也都是绝对稳定的，但它们的截断误差阶均较低，前两种分别是 $0(\Delta t)+0(\Delta x^2)$, $0(\Delta t^2)+$ $+0(\Delta x^2)$，而后者为 $0(\Delta t)+0(\Delta x^2)+0(\Delta t/\Delta x)$，它当 $\Delta t=\Delta x$ 时还失去了相容性. 因而欲获得高精度的解时，时间及空间步长将取得足够小，这就大大增加了工作量和机器存贮单元. 而差分格式(2)的截断误差阶至少可达 $0(\Delta t^2)+0(\Delta x^4)$，在对参数偶$(\alpha,\beta)$特别选取的情况下，还可以进一步提高.

记

$$D_t(\alpha,j)=\frac{1}{\Delta t}\left[\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)u_j^{n+1}-2\alpha u_j^n+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)u_j^{n-1}\right] \tag{9}$$

和

$$\delta_x^2(n)=\frac{1}{\Delta x^2}[u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n] \tag{10}$$

将(9)和(10)式在节点$(j\Delta x, n\Delta t)$处展开为 Taylor 级数，可得：

$$D_t(\alpha,j)=\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\Delta t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+\frac{1}{6}\Delta t^2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)+\frac{1}{12}\alpha\Delta t^3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)+0(\Delta t^4)$$

$$\delta_x^2(n)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{12}\Delta x^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)+\frac{1}{360}\Delta x^4\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)+0(\Delta x^6)$$

注意到关系式：

$$\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial t^q}=\frac{\partial^{p+2q}u}{\partial x^{p+2q}}，\text{当 } p，q \text{ 为正整数。} \tag{11}$$

且再次应用 Taylor 展开，得：

$$\left[\frac{1}{12}D_t(\alpha,j+1)+\frac{5}{6}D_t(\alpha,j)+\frac{1}{12}D_t(\alpha,j-1)\right]-$$
$$-\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\alpha+\beta\right)\delta_x^2(n+1)+\left(\frac{1}{2}-2\beta\right)\delta_x^2(n)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha+\beta\right)\delta_x^2(n-1)\right]=$$
$$=\left(-\frac{1}{12}-\beta\right)\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)\Delta t^2+\frac{3}{6!}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)\Delta x^4+0(\Delta t^3)+0(\Delta x^6)+$$
$$+0(\Delta t^2\Delta x^2)+0(\Delta x^4\Delta t)$$

可见，(2) 式的截断误差至少可达 $0(\Delta t^2)+0(\Delta x^4)$，如特取

$$\alpha=0$$
$$\beta=\frac{1}{240}\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\right)^2-\frac{1}{12}$$

则截断误差达到 $0(\Delta x^6)+0(\Delta t^2\Delta x^2)+0(\Delta x^4\Delta t)+0(\Delta t^3)$。当然，这时还要求

$$\omega\leqslant\frac{1}{\sqrt{20}}$$

最后指出：由模型问题(1)中的初始条件和边界条件，可得网格上的第0层数据 $u_j^0=f_j^0(j=0,1,\cdots,J)$ 及边界上的数据 $u_0^n=g_1^n$，$u_J^n=g_2^n(n=0,1,\cdots)$。由于这族差分格式一般是三层的，因此在数值计算中，还需用精度不低于格式(2)的其它方法求得第1层上的数据 $u_j^1(j=1,\cdots,J-1)$。例如，在一般情况下可用二层格式(3)。因此，当获得第 $n-1$ 及 n 层数据 $u_j^{n-1},u_j^n(j=1,\cdots,J-1)$ 后通过求解差分方程(2)，得第 $n+1$ 层数据 $u_j^{n+1}(j=1,\cdots,J-1)$。关于差分方程(2)的解法通常可分两种，即追赶法和迭代法。由于差分方程的系数矩阵严格对角占优，因此可用 Gauss-Seidel 迭代法求解。

参　考　文　献

[1] Richtmyer, R. D., Morton, K. W., *Difference methods for initial-value problems*, John Wiley & Sons, Inc., 1967.

[2] 周顺兴，计算数学，4(1982)，2。

[3] 冯康等编，数值计算方法，国防工业出版社，1980。

A Family of Absolutely Stable Difference Schemes for Solving the Parabolic Equation

Chen chuandan Lin Qun

(*Math. Depart.*)

Abstract

In this paper, a family of difference schemes with a pair of parameters are proposed, which can be used for solving the parabolic partial differential equation. The partial results of both [1] and [2] have been shown to be the special cases of our schemes (2). It has been simply proved that these schemes are absolutely stable for arbitrarily choosing the non-negative parameters. Moreover, the order of the discretization error is at least, $0(\Delta t^2)+0(\Delta x^4)$, in the special case, $0(\Delta x^6)+0(\Delta x^2\Delta t^2)+$ $+0(\Delta t\Delta x^4)+0(\Delta t^3)$ can be reached by particularly choosing the non-negative parameters. Finally, it is convenient that these schemes can be solved by double sweeping method and Gauss-Seidel iteration method.