第 39 卷 第 4 期 厦门大学学报(自然科学版) Vol. 39 No. 4
2000 年 7 月 Journal of Xiamen University (Natural Science) May 2000
文章编号:0438-0479(2000)04-0432-05

高阶混合型中立差分方程解的振动性

程金发[1],林宝德[2]
(1. 厦门大学数学系,福建 厦门 361005; 2. 漳州农业学校数学系,福建 漳州 363000)

摘要:研究奇数阶混合类型的中立型差分方程:$\Delta^m(x_n+cx_{n-h}+c^*x_{n-h^*})=qx_{n-g}+px_{n+g^*}$.得到关于解振动的一系列新的判别准则.例如:若 $m<g^*$,$p>[\frac{(g^*-m)^{g^*-m}}{g^{*g^*}}+c\frac{(h+g^*-m)^{h+g^*-m}}{(h+g^{*h+g^*})}]m^m$ 且要么 $h^*>g^*$,$p+q>c^*\frac{m^m\cdot(h^*-g^*)^{h^*-g^*}}{(h^*-g^*+m)^{h^*-g^*+m}}$,要么 $g>c^*\frac{(h^*+g)^{h^*+g}m^m}{(h^*+g+m)^{h^*+g+m}}$ 则此方程是振动的,等等.

关键词:振动性;中立型差分方程;正解
中图分类号:O 175.1 **文献标识码**:A

关于差分方程解的振动性问题,长期以来是人们致力研究的课题之一,并且具有理论和实践中的广泛应用.近年来,对于一、二阶差分方程的研究较多[1~5],但是对于高阶混合型中立差分方程的研究则相对较少.

文中研究奇数阶混合型的中立差分方程:

$$\Delta^m(x_n+cx_{n-h}+c^*x_{n-h^*})=qx_{n-g}+px_{n+g^*} \tag{1}$$

解的振动性,这里 c,c^*,q,p 为实数,h,h^*,g 和 g^* 是整数.以及下面更为一般的方程:

$$\Delta^m(x_n+\sum_{i=1}^{n_1}x_{n-h_i}+\sum_{j=1}^{n_2}c_j^*x_{n+h_j^*})=\sum_{l=1}^{n_3}q_lx_{n-g_l}+\sum_{k=1}^{n_4}p_kx_{n-g_k^*} \tag{2}$$

解的振动性,这里 $c_i,c_j^*,q_l,p_k\in R,h_i,h_j^*,g_l,g_k^*\in Z$.

如果单靠特征方程有无正实根判断解的振动性,由于在实际运用中特征方程是个超越方程,要确定特征方程是否存在正实根本身是个相当困难的问题,因此,本文的目的是建立一个直接用 c,c^*,q,p,h,h^*,g 和 g^* 的显式来表达充分条件,并且表达式非常简明,容易验证.本文结果也推广了文献[1]中的一些相关定理.为节省篇幅起见,我们仅对方程(1)加以详细论证.对于方程(2),用我们同样的方法很容易得出相应的结果.

收稿日期:1999-11-04
基金项目:国家自然科学基金资助项目(19871068)和厦门大学校级课题基金资助项目(K01002)
作者简介:程金发(1967-),男,博士.

习惯地,如果方程(1) 的一个非平凡解 x_n 对每一个 $N>0$,存在 $n\geqslant N$,使得 $x_nx_{n+1}\leqslant 0$,那么 x_n 称为振动的;否则称为不振动的. 如果它的所有解振动,则称方程(1) 是振动的.

1　主要结果及证明

本节研究差分方程:$\Delta^m(x_n+cx_{n-h}+c^*x_{n+h^*})=qx_{n-g}+px_{n+g^*}$ 的振动性. 这里 c,c^*,q,p 为实常数,h,h^*,g 和 g^* 是整数.

具体地,我们先看方程:

$$\Delta^m(x_n+cx_{n-h}-c^*x_{n+h^*})=qx_{n-g}+px_{n+g^*} \tag{3}$$

的振动性,这里 c,c^*,q,p 为正实常数,h,h^*,g 和 g^* 是正整数.

定理 1　假定 c^*,g^*,h^* 是正整数,p 是正实数,并假定阶数 $m<g^*$,如果 $p>\left[\frac{(g^*-m)^{g^*-m}}{g^{*g^*}}+c\frac{(h+g^*-m)^{h+g^*-m}}{(h+g^*)^{h+g^*}}\right]m^m$,且要么 $h^*>g^*$,$p+q>c^*\frac{(h^*-g^*)^{h^*-g^*}m^m}{(h^*-g^*+m)^{h^*-g^*+m}}$,要么 $q>c^*\frac{(h^*+g^*)^{h^*+g}m^m}{(h^*-g+m)^{h^*-g+m}}$ 那么方程(3) 是振动的.

证　方程(3) 等价于 $\Delta^m(x_{n-g^*}+cx_{n-h-g^*}-c^*x_{n+h^*-g^*})=qx_{n-g-g^*}+px_n$ 或 $\Delta^m(x_{n+g}+cx_{n-h+g}-c^*x_{n+h^*+g})=qx_n+px_{n+g+g^*}$. 其特征方程多项式分别为 $F(\lambda)=\lambda^{-g^*}(\lambda-1)^m+c(\lambda-1)^m\lambda^{-h-g^*}-c^*(\lambda-1)^m\lambda^{h^*-g^*}-q\lambda^{-g-g^*}-p$,或 $\widetilde{F}(\lambda)=\lambda^g(\lambda-1)^m+c(\lambda-1)^m\lambda^{-h+g}-c^*(\lambda-1)^m\lambda^{h^*+g}-p\lambda^{g+g^*}-q$. 对于式子 $F(\lambda)$,我们有

1) 当 $\lambda>1$ 时,$F(\lambda)<\lambda^{-g^*}(\lambda-1)^m+c(\lambda-1)^m\lambda^{-h-g^*}-p$. 当 $\lambda=\frac{g^*}{g^*-m}(>1)$ 时,$\lambda^{-g^*}(\lambda-1)^m$ 取最大值. 当 $\lambda=\frac{h+g^*}{h+g^*-m}$ 时,$(\lambda-1)^m\lambda^{-h-g^*}$ 取最大值. 故 $F(\lambda)<\frac{m^m(g^*-m)^{g^*-m}}{g^{*g^*}}+c\frac{m^m(h+g^*-m)^{h+g^*-m}}{(h+g^*)^{h+g^*}}-p$. 可见只要 $p>\left[\frac{(g^*-m)^{g^*-m}}{g^{*g^*}}+c\frac{(h+g^*-m)^{h+g^*-m}}{(h+g^*)^{h+g^*}}\right]m^m$,就有 $F(\lambda)<0$.

2) 当 $0<\lambda<1$ 时,$F(\lambda)<-c^*(\lambda-1)^m\lambda^{h^*-g^*}-q-p$,当 $\lambda=\frac{h^*-g^*}{h^*-g^*+m}$ 时,$-(\lambda-1)^m\lambda^{h^*-g^*}$ 取最大值. 故 $F(\lambda)<c^*\frac{m^m(h^*-g^*)^{h^*-g^*}}{(h^*-g^*+m)^{h^*-g^*+m}}-p-q$. 可见只要 $q+p>c^*\frac{m^m(h^*-g^*)^{h^*-g^*}}{(h^*-g^*+m)^{h^*-g^*+m}}$ 就有 $F(\lambda)<0$. 对于式子 $\widetilde{F}(\lambda)$,若 $0<\lambda<1$,则 $\widetilde{F}(\lambda)<-c^*(\lambda-1)^m\lambda^{h^*+g}-q$,当 $\lambda=\frac{h+g^*}{h+g^*+m}$ 时,$-(\lambda-1)^m\lambda^{h^*+g}$ 取最大值. 当满足条件 $q>c^*\frac{m^m(h^*+g)^{h^*+g}}{(h^*+g+m)^{h^*+g+m}}$ 就有 $\widetilde{F}(\lambda)<0$. 综上所述可知,特征方程 $F(\lambda)=0$(或 $\widetilde{F}(\lambda)=0$) 没有正实根,从而可得方程(3) 振动.

考虑方程

$$\Delta^m(x_n-cx_{n-h}+c^*x_{n+h^*})=qx_{n-g}+px_{n+g} \tag{4}$$

这里 c,c^*,q,p 为正实常数,$h,h^*,g\ g^*$ 是正整数. 我们有

定理 2 假定 c,p,q 是正数，$g^* > h^*$ 且 $g > h$，以及假定阶数 $m < g^* - h^*$，如果

$$p > \left[\frac{(g^* - m)^{g^* - m} m^m}{g^{*g^*}}\right] + c^* \frac{(g^* - h^* - m)^{g^* - h^* - m} m^m}{(g^* - h^*)^{g^* - h^*}}, q > c^* \frac{(g - h)^{g-h} m^m}{(g - h + m)^{g-h+m}},$$

那么方程(4)是振动的.

证 方程(4)等价于 $\Delta^m(x_{n-g^*} - cx_{n-h-g^*} + c^* x_{n+h^*-g^*}) = qx_{n-g-g^*} + px_n$，或 $\Delta^m(x_{n+g} - cx_{n-h+g} + cx_{n+h^*+g}) = qx_n + px_{n+g^*+g}$. 其特征方程多项式为

$$F(\lambda) = \lambda^{-g^*}(\lambda - 1)^m - c(\lambda - 1)^m \lambda^{-h-g^*} - c^*(\lambda - 1)^m \lambda^{h^* - g^*} - q\lambda^{-g-g^*} - p$$

$$\widetilde{F}(\lambda) = \lambda^g (\lambda - 1)^m \lambda^{g-h} - c(\lambda - 1)^m \lambda^{g-h} + c^*(\lambda - 1)^m \lambda^{h^*+g} - q - p\lambda^{g^*+g}$$

对于式子 $F(\lambda)$，当 $\lambda > 1$ 时，$F(\lambda) < \lambda^{-g^*}(\lambda - 1)^m + c^*(\lambda - 1)^m \lambda^{-g^* - h^*} - p$，当 $\lambda = \dfrac{g^*}{g^* - m}$ 时，$\lambda^{-g^*}(\lambda - 1)^m$ 取最大值.

当 $\lambda = \dfrac{g^* - h^*}{g^* - h^* - m}$ 时，$(\lambda - 1)^m \lambda^{-(g^* - h^*)}$ 取最大值. 故

$$F(\lambda) < \frac{m^m (g^* - m)^{g^* - m}}{g^{g^*}} + c^* \frac{m^m (g^* - h^* - m)^{g^* - h^* - m}}{(g^* - h^*)^{g^* - h^*}} - p,$$

只要 $p > \dfrac{(g^* - m)^{g^* - m} m^m}{g^{*g^*}} + c^* \dfrac{(g^* - h^* - m)^{g^* - h^* - m} m^m}{(g^* - h^*)^{g^* - h^*}}$ 就有 $F(\lambda) < 0$. 对于式子 $\widetilde{F}(\lambda)$，当 $0 < \lambda < 1$，则 $\widetilde{F}(\lambda) < -c(\lambda - 1)^m \lambda^{g-h} - q$，当 $\lambda = \dfrac{g - h}{g - h + m}$ 时，$-(\lambda - 1)^m \lambda^{g-h}$ 取最大值，故 $\widetilde{F}(\lambda) < c.\dfrac{(g - h)^{(g-h)} m^m}{(g - h + m)^{(g-h+m)}} - q$，只要 $q > c\dfrac{m^m (g - h)^{g-h}}{(g - h + m)^{g-h+m}}$ 就有 $\widetilde{F}(\lambda) < 0$. 综上所综可知，特征方程 $F(\lambda) = 0$(或 $\widetilde{F}(\lambda) = 0$)没有正实根，从而可得方程(4)振动.

考虑方程：

$$\Delta^m(x_n + cx_{n-h} - c^* x_{n-h^*}) = qx_{n-g} + px_{n+g^*} \tag{5}$$

$$\Delta^m(x_n + cx_{n+h} - c^* x_{n+h^*}) = qx_{n-g} + px_{n+g^*} \tag{6}$$

$$\Delta^m(x_n + cx_{n-h} + c^* x_{n+h^*}) = qx_{n-g} + px_{n+g^*} \tag{7}$$

$$\Delta^m(x_n + cx_{n+h} + c^* x_{n+h^*}) = qx_{n-g} + px_{n+g^*} \tag{8}$$

这里 c,c^*,q,p 为正实常数，h,h^*,g 和 g^* 是正整数. 用类似的方法可证下面的定理 3.

定理 3 假定常数 c^*,q,p 是正数，且 $g > h^*$，并假定阶数 $m < g^*$，如果

$$p > \left[\frac{(g^* - m)^{g^* - m}}{g^{*g^*}} + c\frac{(h + g^* - m)^{h+g^*-m}}{(h + g^*)^{h+g^*}}\right] m^m,\ q > c^* \frac{(g - h^*)^{g-h^*} m^m}{(g - h^* + m)^{g-h^*+m}}$$

那么方程(5)是振动的.

定理 4 假定 c^*,p 是正实数，且 $g^* > h$. 并假定阶数 $m < g^* - h$，如果定理 1 中的第 2 个条件(或第 3 个条件)成立，且 $p > \left[\dfrac{(g^* - m)^{g^* - m}}{g^{*g^*}} + c\dfrac{(g^* - h - m)^{g^* - h - m}}{(g^* - h)^{g^* - h}}\right] m^m$，那么方程(6)是振动的.

定理 5 假定 $g^* > h^*$，并假定阶数 $m < g^* - h^*$，且

$$p > \left[\frac{(g^* - m)^{g^* - m}}{g^{*g^*}} + c\frac{(h + g^* - m)^{h+g^*-m}}{(h + g^*)^{h+g^*}} + c^* \frac{(g^* - h^* - m)^{g^* - h^* - m}}{(g^* - h^*)^{g^* - h^*}}\right] m^m$$

那么方程(7)是振动的.

定理 6　假定 $g^* > h^* > h$,并假定阶数 $m < g^* - h^*$,且

$$p > \left[\frac{(g^* - m)^{g^*-m}}{g^{*g^*}} + c\frac{(g^* - h - m)^{g^*-h-m}}{(g^* - h)^{g^*-h}} + c^*\frac{(g^* - h^* - m)^{g^*-h^*-m}}{(g^* - h^*)^{g^*-h^*}}\right]m^m$$

那么方程(8)是振动的.

考虑方程:

$$\Delta^m(x_n + cx_{n-h} + c^* x_{n-h^*}) = qx_{n-g} + px_{n+g} \tag{9}$$

$$\Delta^m(x_n - cx_{n-h} - c^* x_{n+h^*}) = qx_{n-g} + px_{n+g} \tag{10}$$

$$\Delta^m(x_n - cx_{n-h} - c^* x_{n-h^*}) = qx_{n-g} + px_{n+g^*} \tag{11}$$

$$\Delta^m(x_n - cx_{n+h} - c^* x_{n+h^*}) = qx_{n-g} + px_{n+g^*} \tag{12}$$

这里 c, c^*, q, p 为正实常数,h, h^*, g 和 g 是正整数.我们得到下面的定理 7.

定理 7　假定阶数 $m < g^*$,且

$$p > \left[\frac{(g^* - m)^{g^*-m}}{g^{*g^*}} + c\frac{(h + g^* - m)^{h+g^*-m}}{(h + g^*)^{h+g^*}} + c^*\frac{(h^* + g^* - m)^{h^*+g^*-m}}{(h^* + g^*)^{h^*+g^*}}\right]m^m$$

那么方程(9)振动的.

定理 8　假定阶数 $m < g^*$,且

$$p > \frac{(g^* - m)^{g^*-m}m^m}{g^{*g^*}}, g > h, q > c\frac{m^m(g - h)^{g-h}}{(g - h + m)^{g-h+m}} + c^*\frac{(h^* + g)^{h^*+g}m^m}{(h^* + g + m)^{h^*+g+m}}$$

那么方程(10)是振动的.

定理 9　假定阶数 $m < g^*$,如果 $g > h \geqslant h^*$,$p > \dfrac{(g^* - m)^{g^*-m}m^m}{g^{*g^*}}$,

$$q > c\frac{m^m(g - h)^{g-h^*}}{(g - h + m)^{g-h+m}} + c^*\frac{(g - h)^{g-h^*}m^m}{(g - h^* + m)^{g-h^*+m}}$$

那么方程(11)是振动的.

定理 10　假定阶数 $m < g^*$,如果:$p > \dfrac{(g^* - m)^{g^*-m}m^m}{g^{*g^*}}$,且要么 $q > c\dfrac{m^m(h + g)^{h+g}}{(h + g + m)^{h+g+m}} + c^*\dfrac{(h^* + g)^{h^*+g}m^m}{(h^* + g + m)^{h^*+g+m}}$,要么 $h > g^*$,$p + q > c\dfrac{m^m(h - g^*)^{h-g^*}}{(h - g^* + m)^{h-g^*+m}} + c^*\dfrac{(h^* - g^*)^{h^*-g^*}m^m}{(h^* - g^* + m)^{h^*-g^*+m}}$,那么方程(12)是振动的.

2　一些注记

对于方程(2),我们考虑它的下面一种特殊情况

$$\Delta^m\left(x_n + \sum_{i=1}^{n_1} c_i x_{n-k_i}\right) + \sum_{j=1}^{n_2} p_j x_{n-g_j} = 0 \tag{13}$$

这里 c_i, p_j 为正常数,k_j, g_j 是正整数.用类似的方法可证下面的定理 11.

定理 11　对于方程(13),假定 $g_j > k$,如果 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n_2} p_j\left[\frac{(g_j - k)^{g_j-k}\cdot m^m}{(g_j - k + m)^{g_j-k+m}}\right]^{-1} > 1 + \sum_{i=1}^{n_1} c_i$,这里 $k = \max(k_i, k_2, \cdots, k_{n_1})$ 那么方程(13)是振动的.

推论 2　方程 $\Delta x_n + \displaystyle\sum_{j=1}^{n_2} p_j x_{n-g_j} = 0$ 振动的充分条件是 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n_2} p_j\frac{(g_j + 1)^{g_j+1}}{g_j^{gj}} > 1$.

这就是文献[1]中的定理 3.1.

定理 12 对于方程(13),假定 $g_j > k$,如果 $n_2(\prod_{j=1}^{n_2} p_j)^{\frac{1}{n_2}} \cdot \frac{(g-k+m)^{g-k+m}}{(g-k)^{g-k} m^m} > 1 + \sum_{i=1}^{n_1} c_i$,这里 $k = \max(k_1, k_2, \cdots, k_{n_1})$,$g = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} g_j$,那么方程(13)是振动的.

推论 3 方程 $\Delta x_n + \sum_{j=1}^{n_2} p_j x_{n-g_j} = 0$ 振动的充分条件是 $n_2(\prod_{j=1}^{n_2} p_j)^{\frac{1}{n_2}} \cdot \frac{(g+1)^{g+1}}{(g)^g} > 1$,这里 $g = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} g_j$.

这就是文献[1]中的定理 3.2 ,因此,本文结果也推广并改进了文献[1]中的相关定理.

参考文献:

[1] Ladas G. Explicit conditions for the oscillation of difference equations[J]. J. Math Anal. Appl.,1990,153:276—287.

[2] Ladas G. Recent developments in the oscillations of delay difference equations[A]. Smith J. Differential equations:stability and control[C]. Newyork:Dekker,1990.

[3] Lalli B S, Zhang B Z. On existence of positive solutions and bounded oscillations for neutral difference equations[J]. J. Math Anal. Appl,1992,166:272—287.

[4] Kocic V L, Ladas G. Clobal behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications [M]. USA:Kluwer Academic Publishers,1993.

[5] Grace S R. On the oscillations of mixed neutral equations[J]. J. Math. Anal. Appl., 1995,194:377—388.

Oscillation of Higher Order Neutral Difference Equations of Mixed Type

CHENG Jin-fa

(Dept. of math. ,Xiamen Univ. ,Xiamen 361005,China)

Abstract: Odd order neutral difference equations of mixed type: $\Delta^m(x_n + cx_{n-h} + c^* x_{n-h^*}) = qx_{n-g} + px_{n+g^*}$, have been studied. A series of new criteria for the oscillation of those equations have been established. For example: assume $m < g^*$, $p > [\frac{(g^*-m)^{g^*-m}}{g^{*g^*}} + c\frac{(h^*+g^*-m)^{h^*+g^*-m}}{(h+g^*)^{h+g^*}}]m^m$, and one of the following conditions is fulfilled: 1) $h^* > g^*$, $p+q > c^*\frac{(h^*-g^*)^{h^*-g^*}m^m}{g^{*g^*}}$. 2) $g > c^*\frac{(h^*+g)^{h^*+g}m^m}{(h^*+g+m)^{h^*+g+m}}$, then this equation is oscillatory.

Key words oscillation; neutral difference equation; positive solution