学校编码：10384　　　　　　　　　　分类号_______密级_______

学号：19020120153818　　　　　　　　　　UDC_______

厦门大学

博　士　学　位　论　文

q-Kummer 方程及 Rodrigues 公式的推广

贾鲁昆

指导教师姓名：　丁昌明教授,程金发教授

专 业 名 称：　基　础　数　学

论文提交日期：　2017 年　月

论文答辩时间：　2017 年　月

学位授予日期：　2017 年　月

答辩委员会主席：______________

评　　阅　　人：______________

2017 年　　月

Doctoral Dissertation

q-Kummer's equation and extensions of Rodrigues formula

Supervisor: Changming Ding, Jinfa Cheng

Speciality: Fundamental Mathematics

Institution: School of Mathematical Sciences

Xiamen University

Xiamen, P.R. China

2017

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘 要

我们知道, 许多特殊函数, 例如经典正交多项式 (Jacobi, Laguerre, 和 Hermite 多项式), 柱函数和超几何函数都是同样类型的二阶常微分方程的解. 这种方程称为超几何型微分方程. 随着更多特殊函数的不断被引入和研究, 超几何型微分方程也衍生出三种离散化形式. 本文主要研究 Kummer 方程的 q-模拟和对三种离散化形式的超几何型方程的 Rodrigues 公式作推广. 具体来说:

第一章概述了超几何型微分方程及其标准形式, 随后引入了三种离散化形式的超几何型方程.

第二章我们先计算 q-超几何方程的算子形式, 然后归纳出一般形式, 由此我们第一次得到 Kummer 方程的一个 q-模拟. 为简单我们称它为 q-Kummer 方程. 然后我们建立了 q-差分方程情况下的奇点概念. 利用微分方程中的 Frobenius 方法, 我们得到了 q-Kummer 方程在奇点附近的线性无关形式级数解. 在当形式级数解发散的情况下, 我们得到两种在一定条件下收敛的积分解. 最后利用 q-Kummer 方程我们得到了关于 q-超几何级数 ${}_1\Phi_1$ 与紧邻的四个连带函数间的递推关系.

第三章我们推导了超几何型微分方程的第一种离散化形式超几何型 q-差分方程的多项式解的表达公式, 即 q-Rodrigues 公式. 随后我们给出了 q-差分方程情况下伴随方程的两种定义. 利用伴随方程我们给出了超几何型 q-差分方程除多项式解之外解的两种表达公式. 并且举例说明我们推广的 q-Rodrigues 公式是与超几何型 q- 差分方程的第二类函数线性相关的. 最后一节我们给出了超几何型 h-差分方程情况下 h-Rodrigues 公式的推广.

第四章首先给出一般格子上积分的两个定义, 并分析他们与 q-积分, h-积分的紧密联系. 随后受微分方程与 q-差分方程情况下线性算子与其伴随算子之间关系的启发, 我们给出了非一致格子情况下伴随方程的定义. 然后利用得到的伴随方程给出了在非一致格子下超几何型差分方程的除多项式解之外其他解的表达公式. 随后利用伴随方程我们也得到了关于一种超几何型特殊函数的三项递推关系. 最后与第三章方法类似, 利用待定系数法我们给出了更一般的解的表达式.

关键词： 超几何型微分方程; q-Kummer 方程; Frobenius 方法; 连带函数; q-Rodrigues 公式; 非一致格子; 伴随方程; 三项递推关系.

ABSTRACT

The special functions of mathematical physics, namely, the classical orthogonal polynomials (Jacobi, Laguerre, and Hermite polynomials), the cylindrical and hypergeometric functions, are solutions of the second order differential equation with the same type. These equations are called hypergeometric differential equations. With more and more special functions are introduced and studied, there are three discretizations of the hypergeometric differential equations. In this thesis, we establish a q-analogue of Kummer's equation and give extensions of Rodrigues formula in the three discretizations.

In Chapter 1, hypergeometric differential equations and their normal forms are presented. Moreover, three discretizations of hypergeometric differential equations are also given.

In Chapter 2, we first compute the operator form of q-hypergeometric equation, then using the operator form, the general form are established. From the general form, a q-analogue of Kummer's equation called q-Kummer's equation is obtained for the first time. Then, we give the notion of singular point in the case of q-difference equations. Linearly independently formal series solution are obtained by using Frobenius method in ODEs. Given the formal series solutions are divergent, we have two integral solutions which are convergent under certain conditions. In the end, we establish six contiguous relations about the q-hypergeometric series ${}_1\Phi_1$.

In Chapter 3, we give a derivation about the q-analogue of Rodrigues formula of the hypergeometric q-difference equations. Then, two ways of definition about adjoint equations in the case of q-difference equations are given. Using adjoint equations, we give two explicit forms of solutions except the polynomials solutions. Moreover, the extended Rodrigues formula are closely related with the second kind function of hypergeometric q-difference equations exemplified by the little q-Jacobi polynomials. In the end, a more general extension of Rodrigues formula in the case of hypergeometric h-difference equations is presented.

Chapter 4 is devoted to the hypergeometric difference equations on non-uniform lattices. Two notions of integrations on general lattices are given in the first section. Inspired by the cases of differential equations and its q-analogue, we give a definition of adjoint equation corresponding to hypergeometric difference equations on non-uniform lattices. Then using the adjoint equation, we give an explicit form about the solutions of hypergeometric difference equations on non-uniform lattices except polynomial solutions. We also obtain a three-term recurrence relation about a special function which is a solution of the adjoint equation. In the end, a more general extension of Rodrigues formula is given by using a similar method as the one in Chapter 3.

Key Words: hypergeometric differential equation; q-Kummer's equation; Frobenius method; contiguous function; q-Rodrigues formula; non-uniform lattice; adjoint equation; three-term recurrence relation.

目　录

CONTENTS

第一章　绪论

§ 1.1　研究背景

令 $\sigma(z)$ 和 $\tau(z)$ 分别为关于复变量 z 的至多二次和至多一次多项式, $|\sigma''| + |\tau'| > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ 为常数. 下面的二阶常微分方程

$$\sigma(z)u''(z) + \tau(z)u'(z) + \lambda u(z) = 0, \tag{1.1.1}$$

称为*超几何型微分方程*. 通过待定系数法我们可以得到 (1.1.1) 的形式级数解.

定理 1.1.1: [13] 若 $z = a$ 是方程 $\sigma(z) = 0$ 的一个解, 则方程 (1.1.1) 具有如下形式的特解

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{1.1.2}$$

其中 c_n 满足递推关系

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = -\frac{\lambda + n[\tau' + \frac{1}{2}(n-1)\sigma'']}{(n+1)[\tau(a) + n\sigma'(a)]}. \tag{1.1.3}$$

否则, 若方程 $\sigma(z) = 0$ 没有解, 但是方程 $\tau(z) = 0$ 有一个解 $z = a$, 则方程 (1.1.1) 也存在形如 (1.1.2) 的级数解, 其中

$$\frac{c_{n+2}}{c_n} = -\frac{\lambda + n\tau'}{(n+1)(n+2)\sigma'(a)}. \tag{1.1.4}$$

关于超几何型微分方程有两个结果:

(1) 若 $\tau' \neq 0$, 则通过关于变量 z 的线性变换 [44], 方程 (1.1.1) 可以转化为如下标准形式

$$z(1-z)u'' + [c - (a+b+1)z]u' - abu = 0, \qquad \text{(Euler 超几何方程)}$$

$$zu'' + (b-z)u' - au = 0, \qquad \text{(Kummer 方程或合流超几何方程)}$$

$$u'' - 2zu' + du = 0, \qquad \text{(Hermite 方程)}$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ 为参数. 根据 (1.1.2)–(1.1.4) , 上面标准方程的特解分别是 Gauss 超几何函数, 合流超几何函数(或称为 Kummer 函数)和 Hermite 函数.

(2) 若对于某个正整数 n,

$$\lambda = \lambda_n := -\frac{n(n-1)\sigma''}{2} - n\tau' \text{ 且 } \lambda_m \neq \lambda_n,\ m = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad (1.1.5)$$

则方程 (1.1.1) 的特解 (1.1.2) 变成了有限项级数, 即具有 n 次多项式解 $u_n(z)$. 在 1929 年, Bochner 对方程 (1.1.1) 的多项式解作了分类. 他证明了在经过关于变量 z 的线性变换之后方程 (1.1.1) 具有如下的多项式系统 [14]:

(i) Jacobi 多项式 $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, $\quad (\alpha, \beta, \alpha+\beta+1 \notin \{-1, -2, \ldots, \})$

(ii) Laguerre 多项式 $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, $\quad (\alpha \notin \{-1, -2, \ldots, \})$

(iii) Hermite 多项式 $\{H_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$

(iv) Bessel 多项式 $\{B_n^{(\alpha,\beta)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, $\quad (\alpha \notin \{0, -1, -2, \ldots, \}$ 且 $\beta \neq 0)$.

事实上, 在某些参数($\alpha, \beta > -1$) 范围内, 前三种情况都是实区间上的正交类, 第四种是在圆周上正交. 然而在某些参数下, Bessel 多项式也存在有限个在实区间的正交类. 特别的, 当 $\alpha = \beta = 0$ 时, Jacobi 多项式即是 Legendre 多项式, 记作 $P_n(z)$. 它第一次由 Legendre 在1785年通过生成函数定义

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^m = (1 - 2zt + t^2)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (1.1.6)$$

由 (1.1.6) 式可推出 Legendre 微分方程

$$(1 - z^2) P_n''(z) - 2z P_n'(z) + n(n+1) P_n(z) = 0. \qquad (1.1.7)$$

Olinde Rodrigues (1816), Sir James Ivory (1824) 和 Carl Gustav Jacobi (1827) 分别独立给出了 Legendre 多项式的如下微分表示

$$P_n(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (1 - z^2)^n. \qquad (1.1.8)$$

后来 Heine(1878) 就把 (1.1.8) 称为 Rodrigues 公式. 现在与 (1.1.8) 类似的任

何正交多项式的微分表示都被称为 Rodrigues 公式(关于 Rodrigues 公式的历史详见[12]).

对于一般的超几何型微分方程, 其多项式解 $u_n(z)$ 也有一个微分表示: [15]

$$u_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} (\rho(z)\sigma^n(z)), \tag{1.1.9}$$

其中 $\rho(z)$ 满足 Pearson 方程

$$(\sigma(z)\rho(z))' = \tau(z)\rho(z).$$

上面 $u_n(z)$ 的微分表示 (1.1.9) 称为 *Rodrigues* 公式. 自然地, 这里有个问题: 若对于某个正整数 n 来说, 条件 (1.1.5) 成立, 则方程 (1.1.1) 除了多项式之外的解的微分表示是什么? 对于变量 z 是实变量的情况, 这个问题已由 Area 等人在文献 [7] 中回答(事实上, Vicente Gonçalves 早已在其文章 [25] 中得到, 见文章 [46]). 他们得到了 Rodrigues 公式的一个推广(我们把方程的一般解也记作 $u_n(z)$)

$$u_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} \left[\rho(z)\sigma^n(z) \left(C_1 + C_2 \int \frac{dz}{\rho(z)\sigma^{n+1}(z)} \right) \right], \tag{1.1.10}$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

最近, 受文献 [25] 的启发, W. Robin 建立了更一般的 Rodrigues 公式 [52]($z \in \mathbb{R}$)

$$u_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} \left[\rho(z)\sigma^n(z) \left(C + \int \frac{P_n(z)}{\rho(z)\sigma^{n+1}(z)} dz \right) \right], \tag{1.1.11}$$

其中 $P_n(z)$ 是任意至多 n 次多项式并且 C 是任意常数.

James M. Horner 在二十世纪六十年代对 Rodrigues 公式也作了类似的推广(同样 $z \in \mathbb{R}$) [28–30].

$$u_n(z) = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\sigma^n(z) W(z, z_0) \left(k_1 + \int_{z_1}^{z} \frac{k_2 P_{n-1}(t)}{W(t, z_0)\sigma^{n+1}(t)} dt \right) \right],$$

其中 k_1, k_2 为任意常数, $P_{n-1}(\cdot)$ 为任意至多 $n-1$ 次多项式,

$$W(z, z_0) = e^{-\int_{z_0}^{z} \frac{\tau(t)}{\sigma(t)} dt} \text{ 并且 } z_0, z_1 \text{ 是任意使得积分存在的点.}$$

更多地, 方程 (1.1.1) 有三种离散化形式. 第一种是超几何型 q-差分方程

$$\sigma(z)D_qD_{q^{-1}}u(z)+\tau(z)D_qu(z)+\lambda u(z)=0, \tag{1.1.12}$$

其中

$$0<q<1,\ D_qu(z)=\frac{u(z)-u(qz)}{(1-q)z},\ D_{q^{-1}}u(z)=\frac{u(z)-u(q^{-1}z)}{(1-q^{-1})z}.$$

第二种是超几何型的 h-差分方程

$$\sigma(z)D_h^2u(z-h)+\tau(z)D_hu(z)+\lambda u(z)=0, \tag{1.1.13}$$

其中

$$h\in\mathbb{C}\backslash\{0\},\ D_hu(z)=\frac{u(z+h)-u(z)}{h},\ D_h^2u(z)=D_h\left(D_hu(z)\right).$$

最后一种是在格子 $x(z)$ 上的超几何型差分方程 [50]

$$\widetilde{\sigma}[x(z)]\frac{\Delta}{\Delta x(z-1/2)}\left[\frac{\nabla u(z)}{\nabla x(z)}\right]+\frac{1}{2}\widetilde{\tau}[x(z)]\left[\frac{\Delta u(z)}{\Delta x(z)}+\frac{\nabla u(z)}{\nabla x(z)}\right]+\lambda u(z)=0. \tag{1.1.14}$$

其中*格子* $x(z)$ 定义为具有如下形式的复变量函数

$$x(z)=c_1q^z+c_2q^{-z}+c_3, \tag{1.1.15}$$

或

$$x(z)=\widetilde{c}_1z^2+\widetilde{c}_2z+\widetilde{c}_3, \tag{1.1.16}$$

其中 $c_i,\widetilde{c}_i\in\mathbb{C}$ 是常数, $\widetilde{\sigma}(x)$ 和 $\widetilde{\tau}(x)$ 是分别关于格子 $x(z)$ 的至多二次和至多一次多项式,

$$\Delta u(z)=u(z+1)-u(z),\quad \nabla u(z)=\Delta u(z-1)=u(z)-u(z-1).$$

若 $c_1c_2\neq 0,\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2\neq 0$, 则格子 $x(z)$ 称为*非一致格子*. 此时方程 (1.1.14) 称为*非一致格子上的超几何型差分方程*.

容易看到, 若 $u(z)$ 是关于 $x(z)$ 的函数并且 $x(z)=q^z$, 则方程 (1.1.14) 等价于超几何型 q-差分方程 (1.1.12). 若 $x(z)=z$, 则方程 (1.1.14) 对应于超几何型 h-差分方程 (1.1.13) 中 $h=1$ 的情况. 因此方程 (1.1.14) 可以看作前面两种离散