学校编码：10384　　　　　　　　　　　　　　　　　　分类号______ 密级______

学号：19020141152600　　　　　　　　　　　　　　　　UDC______

硕 士 学 位 论 文

多重Zeta函数值与Euler和式的研究

The research of the multiple zeta values and Euler sums

徐　策

指导教师姓名：张　剑　文　教授

专 业 名 称：基　础　数　学

论文提交日期：2017　年　5　月

论文答辩日期：2017　年　5　月

学位授予日期：2017　年　5　月

答辩委员会主席：__________

评　　阅　　人：__________

2017 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（ ）课题（组）的研究成果，获得（ ）课题（组）经费或实验室的资助，在（ ）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

201 年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　年　月　日解密，解密后适用上述授权。

（　　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打"√"或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

201　年　月　日

中文摘要

在 1742 年回复哥德巴赫的信中, 欧拉考虑了如下形式的二重和式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\right)/n^q,$$

其中 p 和 q 都为正整数且 $q\geq 2$. 这种类型的和式后来就被称为线性的 (或二重) 欧拉和式. 从这开始, 对 k 重欧拉和式封闭值的研究一直吸引着许多的专业和业余研究人员的兴趣, 它是古典 Riemann zeta 函数的推广, 一般有如下两种定义

$$\zeta\left(s_1,s_2,\cdots,s_m\right):=\sum_{n_1>n_2>\cdots>n_m>0}\frac{1}{n_1^{s_1}n_2^{s_2}\cdots n_m^{s_m}},$$

和

$$\zeta^{\star}\left(s_1,s_2,\cdots,s_m\right):=\sum_{n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_m>0}\frac{1}{n_1^{s_1}n_2^{s_2}\cdots n_m^{s_m}},$$

其中为了确保上式定义的级数收敛, 需要添加如下条件

$$\Re\left(s_1\right)>1,\ \Re\left(s_j\right)>0,\ j=1,2,\cdots,m.$$

根据定义的不同, 上面的两个和式很多时候也被称为多重 zeta 函数和多重 zeta-star 函数. 在过去的几十年中, 研究人员已经陆续发现欧拉和式在组合学、扭结理论和高能物理等领域内都有着很大的应用. 详细的可参见文献 [1,2]. 本文主要目的是研究权 $w\leq 10$ 的非线性欧拉和式的封闭值问题, 其定义为

$$S\left(p_1,p_2,\cdots,p_m;q\right):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(p_1)}H_n^{(p_2)}\cdots H_n^{(p_m)}}{n^q}\quad\left(2\leq q\in\mathbb{N}\right),$$

这里的 $H_n^{(p)}$ 是 n 项 p 阶的调和数 (Harmonic number), 其定义为

$$H_n^{(p)}:=1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}.$$

在这篇文章中, 我们利用级数的多重积分的代替的方法, 建立了一系列古典的调和数和

多重 zeta 函数值的关系. 特别地, 我们建立了一类多重 zeta 函数值和多重 zeta-star 函数值之间的关系式. 此外, 我们也证明了一个非常重要的结论, 即：当权 $w \leq 9$ 且不等于 8 时, 所有的欧拉和式都能用 Riemann zeta 函数的有理系数组合表示出来. 对于权 $w = 8$, 所有的欧拉和式都能退化成线性和式 $S(2;6)$. 对于权 $w = 10$, 所有的二次欧拉和式 $S(p_1, p_2; q)$ 都能退化成线性和式 $S(2;6)$ 和 $S(2;8)$.

关键词： 多重zeta函数值；多重zeta-star函数值；多重调和数和；多重star调和数；欧拉和式.

Abstract

In response to a letter from Goldbach in 1742, Euler considered sums of the form

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\right)/n^q,$$

where p and q are positive integers with $q \geq 2$. These kind of sums are called the linear (or double) Euler sums today. Historically, the k-fold Euler sums has attracted specialists and nonspecialists alike with its lovely evaluations, it is a extension of classical Riemann zeta function, which are defined by

$$\zeta\left(s_1, s_2, \cdots, s_m\right) := \sum_{n_1>n_2>\cdots>n_m>0} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_m^{s_m}},$$

and

$$\zeta^\star\left(s_1, s_2, \cdots, s_m\right) := \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_m>0} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_m^{s_m}},$$

where the condition

$$\Re\left(s_1\right)>1,\ \Re\left(s_j\right)>0,\ j=1,2,\cdots,$$

is required to ensure convergence of the series. Much the same can be said for multiple zeta function and multiple zeta star function, which, within the past decade, have arisen in combinatorics, knot theory and high-energy physics and so on, for more details, see for instance [1,2]. The purpose of the present paper is to study closed forms of nonlinear Euler sums with weight$\leqslant$10. The nonlinear Euler sum is defined by

$$S\left(p_1, p_2, \cdots, p_m; q\right) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(p_1)} H_n^{(p_2)} \cdots H_n^{(p_m)}}{n^q} \quad (2 \leq q \in \mathbb{N}).$$

Here $H_n^{(p)}$ denotes the nth harmonic number of order p defined as

$$H_n^{(p)} := 1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}.$$

In this paper, by using the methods of multiple integral representations of series, we establish some expressions of series involving classical harmonic numbers and multiple zeta values. A relation between multiple zeta values and multiple zeta star values is also given. Furthermore, we prove the important conclusion: all Euler sums of weight ≤ 9 are reducible to $\mathbb{Q}$-linear combinations of single zeta monomials with the addition of $S(2;6)$ for weight 8. For weight $p_1+p_2+q=10$, all quadratic sums $S(p_1,p_2;q)$ are reducible to $S(2;6)$ and $S(2;8)$.

Key words: Multiple zeta value; multiple zeta-star value; multiple harmonic sum; multiple star harmonic sum; Euler sum.

目 录

中文摘要 I

英文摘要 III

中文目录 V

英文目录 VI

第 一 节 引言 1

1.1 调和数、斯特林数和完全指数型贝尔数 1

1.2 欧拉和式和多重Zeta函数值 3

1.3 本论文的主要研究内容 6

1.4 论文的主要结构 7

1.5 一些引理 8

第 二 节 调和数、斯特林数、贝尔数的组合级数与多重泽塔函数的关系式 11

2.1 主要定理 11

2.2 多重泽塔与泽塔星函数的一些关系 16

第 三 节 欧拉和式的一些结果 19

3.1 一些已知的结果 19

3.2 其余的权$w = 8, 9$的欧拉和式 22

第 四 节 总结 28

参考文献 29

致谢 31

第 五 节 在学期间完成的学术论文 32

Contents

Chinese Abstract I

English Abstract III

Chinese Contents V

English Contents VI

1 Introduction 1

1.1 Harmonic number, Stirling number and complete exponential Bell number . . . 1

1.2 Euler sums and multiple zeta values . . . 3

1.3 The main research work of this dissertation . . . 6

1.4 The framework of this dissertation . . . 7

1.5 Some lemmas . . . 8

2 The relations between multiple zeta values and combined series of harmonic numbers, Stirling numbers and Bell numbers 11

2.1 The main theorems . . . 11

2.2 Some relations of multiple zeta and zeta-star function . . . 16

3 Some results on Euler sums 19

3.1 Some known results . . . 19

3.2 The remainder Euler sums of weight $w = 8, 9$ . . . 22

4 Conclusions **28**

4 References **29**

4 Acknowledgements **31**

第 一 节　引言

1.1　调和数、斯特林数和完全指数型贝尔数

本文将会用到三类常数, 分别是调和数、第一类斯特林数和完全指数型贝尔数. 本节将介绍这三类数之间的一些关系, 并给出一些例子. 在本文中, 一般的 n 项 p 阶的调和数 (Harmonic numbers) 是指前 n 个正整数的 p 次方的倒数和, 即:

$$H_n^{(p)} := 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \quad (p > 0). \tag{1-1}$$

当 $p = 1$ 时, 这个调和数就是古典的调和数, 其定义为 $H_n = H_n^{(1)}$. 如果 $p > 1$, 则上式定义的调和数也称为 Riemann zeta 函数的前n项的部分和式, 因为当 $n \to \infty$ 时, 有如下极限等式成立

$$\lim_{n\to\infty} H_n^{(p)} = \zeta(p), \quad \Re\,(p) > 1,$$

这里的 Riemann zeta 函数 $\zeta(p)$ 定义为 ([3])

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \Re(s) > 1.$$

第一类无符号斯特林数 (The unsigned Stirling numbers of the first kind) 是由下面的有限乘积定义的 ([4])

$$n!\,(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} s\,(n+1,k+1)\,x^k, \tag{1-2}$$

当 $0 \le k \le n \in \mathbb{N}$ 时, $s(n,0) = s(0,n) = 0$. 当 $k = n = 0$ 时, $s(0,0) = 1$. 当 $n < k$ 时, $s(n,k) = 0$. 根据第一类斯特林数的定义, 我们容易得到如下递推关系

$$s\,(n,k) = s\,(n-1,k-1) + (n-1)\,s\,(n-1,k)\,.$$

从上面的递推式可以推得第一类无符号斯特林数的母函数为

$$\sum_{n=k}^{\infty} s\,(n,k)\frac{t^n}{n!} = \ln^k\left(\frac{1}{1-t}\right)/k! \quad ,k \geq 0, t \in [-1,1).$$

另一方面, 我们可以将 (1-2) 式改写为

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} s\,(n+1,k+1)\,x^k =& n!\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{j}\right)\right\}\\ =& n!\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{kj^k}\right\}\\ =& n!\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{H_n^{(k)}x^k}{k}\right\}.\end{aligned} \tag{1-3}$$

将 (1-3) 式右边展开成幂级数形式, 然后通过比较式子两边 x^n 对应的系数, 我们就知道第一类无符号斯特林数能用调和数的有理系数组合表示出来. 一些例子如下:

$$\begin{aligned}&s\,(n,1) = (n-1)!,\\ &s\,(n,2) = (n-1)!H_{n-1},\\ &s\,(n,3) = \frac{(n-1)!}{2}\left[H_{n-1}^2 - H_{n-1}^{(2)}\right],\\ &s\,(n,4) = \frac{(n-1)!}{6}\left[H_{n-1}^3 - 3H_{n-1}H_{n-1}^{(2)} + 2H_{n-1}^{(3)}\right],\\ &s\,(n,5) = \frac{(n-1)!}{24}\left[H_{n-1}^4 - 6H_{n-1}^{(4)} - 6H_{n-1}^2H_{n-1}^{(2)} + 3(H_{n-1}^{(2)})^2 + 8H_{n-1}H_{n-1}^{(3)}\right].\end{aligned}$$

完全指数型的贝尔多项式 (Exponential complete Bell polynomial) $Y_n(x_1,x_2,\ldots)$ 的定义为 ([4,5])

$$\exp\left(\sum_{m\geq 1} x_m\frac{t^m}{m!}\right) = 1 + \sum_{k\geq 1} Y_k\,(x_1,x_2,\cdots,x_k)\,\frac{t^k}{k!},\ Y_0\,(\cdot) = 1. \tag{1-4}$$

在本文中, 我们采用 [6] 中的定义, 定义序列 $(Y_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$

$$Y_k\,(n) := Y_k\left(H_n, 1!H_n^{(2)}, 2!H_n^{(3)}, \cdots, (r-1)!H_n^{(r)}, \cdots\right).$$

在 [5] 中, Riordan 给出了贝尔数的递推关系式

$$Y_k\,(x_1,x_2,\cdots,x_k) = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}x_{k-j}Y_j\,(x_1,x_2,\cdots,x_j), k \in \mathbb{N}.$$

因此, 由上面的递推关系式可知, 贝尔数 $Y_k(n)$ 能用调和数的有理乘积表示. 一些简单例子如下：

$$\begin{aligned}
Y_1(n) =& H_n, Y_2(n) = H_n^2 + H_n^{(2)}, \\
Y_3(n) =& H_n^3 + 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}, \\
Y_4(n) =& H_n^4 + 8H_nH_n^{(3)} + 6H_n^2H_n^{(2)} + 3(H_n^{(2)})^2 + 6H_n^{(4)}, \\
Y_5(n) =& H_n^5 + 10H_n^3H_n^{(2)} + 20H_n^2H_n^{(3)} + 15H_n(H_n^{(2)})^2 \\
& + 30H_nH_n^{(4)} + 20H_n^{(2)}H_n^{(3)} + 24H_n^{(5)}.
\end{aligned}$$

1.2 欧拉和式和多重Zeta函数值

对欧拉和式的封闭值 (closed form) 的研究是一个非常古老的问题, 大约在 1742 年的时候，哥德巴赫 (Goldbach) 写了一封信给远在圣彼得堡的欧拉 (Euler), 询问一类级数 (该级数的第 n 项是由古典的黎曼泽塔函数 (Riemann Zeta function) 的前 n 项部分和式作为分子和以 n 的任意大于 1 的正整数次方作为分母组成的) 是否可以表示成已知的一些常数的有理组合, 用数学语言表达即是：下列类型的级数 (m 和 p 都是正整数, 并且需要 p 大于1保证级数收敛)

$$S(p;q) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(p)}}{n^q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \tag{1-5}$$

能否用已知的一些简单常数 (如: $\pi, \ln 2$) 表示出来, 即可退化性, 其中 $w := p + q$ 称为 (1-5) 式的权重 (weight). 欧拉证明了当权重为小于等于 13 的奇数或小于等于 7 的正整数时, (1-5) 式中的二重级数能够用黎曼泽塔函数表示出来，并且他还推测了权重为奇数时, (1-5) 中所有和式都能退化成泽塔函数, 而且还给出了他推测的公式, 这个推测的公式直到 1995 年才由 D. Borwein, J. M. Borwein 和 R. Girgensohn ([7]) 给出了证明 (L. Tornheim也证明了可退化性, 但是没有给出公式), 此外, 他们还推测了当权重为大于 7 的偶数时, (1-5) 式是不能退化成 zeta 函数的. 在此之后, (1-5) 式所定义的级数就被称为古典的欧拉和式 (Euler sum), 经过将近 300 年的发展，欧拉和式已经成为数论领域

的一个比较重要的研究方向, 并且出现了许多新的变体和有趣的结果, 这方面最好的结果是由 Philippe Flajolet 和 Bruno Salvy 在 1998 年给出的 ([8]). 在文 [8] 中, Flajolet 和 Salvy 将 (1-5) 式定义为线性的欧拉和式 (Linear Euler sum)，并且给出了如下一般的定义：

$$S\left(p_1, p_2, \cdots, p_m; q\right) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(p_1)} H_n^{(p_2)} \cdots H_n^{(p_m)}}{n^q} \quad (2 \leq q \in \mathbb{N}), \tag{1-6}$$

其中指标 $w := p_1 + p_2 + \cdots + p_m$ 和 m 分别被称为 (1-6) 式的权 (weight) 和阶 (degree). 如果 m 是大于 1 的正整数, 那么 (1-6) 式被称为非线性的欧拉和式 (Nonlinear Euler sum). 容易证明权 w 的欧拉和式中包含了 $m = p(1) + p(2) + \cdots + p(w-2)$ 个级数, $p(i)$ 是正整数 i 的分拆数. 例如: $w = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 时, 对应的有 $m = 1, 3, 6, 11, 18, 29, 44$.

文 [8] 中给出的许多结果都是开创性的, 因为 Flajolet 和 Salvy 利用留数定理 (Residue Theorem) 和围道积分 (Contour integral) 建立了一套比较全面和系统的新方法, 利用这种方法可以解决许多高阶欧拉和式的可退化性问题. 例如当权重为偶数时, 他们证明二次和式 $S(p_1, p_2; q)$ 能够退化成权重相等的线性欧拉和式. 目前已经证明所有 $w \leq 9$ 的欧拉和式都能用 zeta 值或线性和式的有理系数组合表达出来, 可参见文献 ([9–14]).

下面, 我们来介绍多重 zeta 函数值. 首先, 我们来介绍一下古典的黎曼泽塔函数 (Riemann zeta function), 在解析数论中, Riemann zeta 函数有着十分重要的地位, 最开始这个函数是定义在 s 的实部大于 1 的平面上, 其定义为

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \Re(s) > 1. \tag{1-7}$$

因为上式右边的级数只有当 $s > 1$ 时才收敛. 欧拉在1740年考虑过 s 为正整数的情况, 他解决了 $\zeta(s)$ 函数当 s 为偶数时的值, 即 $\zeta(2k) = \frac{(2\pi)^{2k} B_k}{2(2k)!}$, 其中 B_k 为伯努利数(而 $\zeta(s)$ 函数当 s 为奇数时,至今也没有得出准确的解析值.). 后来切比雪夫将泽塔函数拓展到 $s > 1$ 的情况. 黎曼认识到：ζ 函数可以通过解析开拓来扩展到一个定义在复数域 $(s, s \neq 1)$ 上的全纯函数, 这也是黎曼猜想所研究的函数. 黎曼猜想是关于黎曼函数 $\zeta(s)$

的零点分布的猜想，黎曼发现了质数(素数)分布的奥秘完全蕴藏在一个特殊的 $\zeta(s)$ 函数之中, 尤其是使那个函数取值为零的一系列特殊的点对质数分布的细致规律有着决定性的影响. 希尔伯特在第二届国际数学家大会上提出了20世纪数学家应当努力解决的23个数学问题, 被认为是20世纪数学的制高点, 其中便包括黎曼假设. 现今克雷数学研究所悬赏的世界七大数学难题中也包括黎曼猜想, 尽管经过数学家们一百多年的努力, 黎曼猜想取得了许多重要的突破, 但是时至今日仍然没有完全证明这个猜想的正确性. 因此，对 $\zeta(s)$ 函数的研究是数论领域甚至是整个数学界的研究方向.

多重泽塔函数 (Multiple zeta function) 是古典的欧拉-黎曼函数 $\zeta(s)$ 的推广, 一般定义为如下多重级数 ([2])：

$$\zeta\left(s_1, s_2, \cdots, s_m\right) := \sum_{n_1>n_2>\cdots>n_m>0} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_m^{s_m}}, \tag{1-8}$$

其中为了确保上式定义的级数收敛, 需要如下条件

$$\Re\left(s_1\right)>1,\ \Re\left(s_j\right)>0,\ j=1,2,\cdots,m.$$

相似的, 多重泽塔星函数 (Multiple zeta star function) 定义为 ([13,15])

$$\zeta^{\star}\left(s_1, s_2, \cdots, s_m\right) := \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_m>0} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_m^{s_m}}, \tag{1-9}$$

$$\Re\left(s_1\right)>1,\ \Re\left(s_j\right)>0,\ j=1,2,\cdots,m.$$

其中指标 $w := s_1+s_2+\cdots+s_m$ 和 m 分别记做 (1-8)、(1-9) 式的权重 (weight) 和深度 (depth). 并且, 我们定义多重泽塔(星)函数的部分和为

$$\zeta_n\left(s_1, s_2, \cdots, s_m\right) := \sum_{n \geq n_1>n_2>\cdots>n_m \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_m^{s_m}},$$

$$\zeta_n^{\star}\left(s_1, s_2, \cdots, s_m\right) := \sum_{n \geq n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_m \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_m^{s_m}},$$

为了方便起见, 当 $n<k$ 时, 令 $\zeta_n\left(s_1, s_2, \cdots, s_m\right)=0$. $\zeta_n(\emptyset)=\zeta_n^{\star}(\emptyset)=1$. 根据以上定

义, 显然有如下关系

$$H_n^{(p)} \equiv \zeta_n(p) \equiv \zeta_n^\star(p) := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^p},\ p,n \in \mathbb{N}.$$

目前, 对多重泽塔(星)函数的研究主要停留在研究其在正整数时的特殊值问题和对称结构. 对其特殊值的研究主要是能不能用深度更低的多重泽塔(星)函数来表示, 如果可以的话, 那么我们称这个特殊值能够退化, 很明显深度越低结论就越好, 这方面的结果有很多, 可以参看文献 [17–23]. 在文 [23] 中, Zagier证明了这个特殊值 $\zeta(2,...,2,3,2,...,2)$ 和 $\zeta^\star(2,...,2,3,2,...,2)$ 能够用黎曼泽塔函数的多项式表示出来. 事实上, 多重泽塔函数和欧拉级数是可以相互变换的, 如果我们对欧拉和式分子中的每个和式的指标赋予大小关系, 就可以变成多重泽塔函数, 如:

$$S\left(p_1,p_2;q\right)=\zeta\left(q,p_1,p_2\right)+\zeta\left(q,p_2,p_1\right)+\zeta\left(q,p_1+p_2\right).$$

由于多重泽塔(星)函数跟欧拉和式存在着紧密联系, 所以将两者结合起来一起研究是非常有意义的.

为了方便起见, 下文中我们将用符号 $\{p\}_m$ 代表出现 m 个 p, 即

$$\{p\}_m := \left\{\underbrace{p,\ldots,p}_{m}\right\}.$$

这样就可以将一些复杂的欧拉和式或多重泽塔函数值简单的表示出来, 例如:

$$S\left(\{1\}_3,2;4\right)=S\left(1,1,1,2;4\right), S\left(1,\{2\}_2;3\right)=S\left(1,2,2;3\right),$$

$$\zeta\left(5,3,\{1\}_2\right)=\zeta\left(5,3,1,1\right),\ \zeta^\star\left(4,2,\{1\}_3\right)=\zeta^\star\left(4,2,1,1,1\right).$$

1.3　本论文的主要研究内容

本文中, 我们主要讨论权重 $w \le 10$ 的非线性欧拉和式的封闭值问题. 首先, 通过构造级数的多重积分, 我们能获得一些关于调和数, 第一类斯特林数和贝尔数组合而成的级数的积分代替, 然后利用线性变换去改变积分变量的区域 (整体积分区域不变) 并再次计算便可知这个积分能用多重泽塔函数的组合表示出来. 因为斯特林数和贝尔数都