

学校编码: 10384

分类号_____密级_____

学号: 19020120153816

UDC_____

厦 门 大 学

博 士 学 位 论 文

随机波动率模型下信用衍生产品和期权定价及其应用

Credit Derivatives and Options Pricing under Stochastic Volatility Models with Its Applications

张娇娇

指导教师姓名: 张曙光教授

专业名称: 概率论与数理统计

论文提交日期: 2016年 月

论文答辩时间: 2016年 月

学位授予日期: 2016年 月

答辩委员会主席: _____

评 阅 人: _____

2016年 月

Doctoral Dissertation

**Credit Derivatives and Options Pricing under
Stochastic Volatility Models with Its
Applications**

Supervisor: Shuguang Zhang

Speciality: Probability and Mathematical Statistics

Institution: School of Mathematical Sciences

Xiamen University

Xiamen, P.R. China

2016

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（ ）课题（组）的研究成果，获得（ ）课题（组）经费或实验室的资助，在（ ）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于 年 月 日解密，解密后适用上述授权。

2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年 月 日

随机波动率模型下信用衍生产品和期权定价及其应用

摘 要

本文使用不同的方法研究了在随机利率模型和随机波动率模型下的衍生产品定价. 使用 reduced-form 方法, 本文得到了在分数维随机利率的模型下信用衍生产品的精确定价公式. 对快速均值回复 Ornstein-Uhlenbeck (O-U) 过程的随机波动率模型, 本文采用 Fouque 等 (2000) 提出的扰动法得到了永久美式障碍期权的渐近公式. 对波动率服从不同 O-U 过程的随机波动率模型, 我们考虑 Josep 等 (2008) 提出的关于“波动率的波动率”的 Fourier 变换方法得到了多资产欧式期权的近似定价公式. 最后, 将新得到的永久美式障碍期权的渐近公式应用到银行挤兑决策.

对于带跳的分数维随机利率模型, 本文讨论 primary-secondary 框架下的违约债券和信用违约互换 (CDS) 的定价问题. 通过 reduced-form 方法, 利用关于分数维布朗运动的拟鞅的性质和 Park (2008) 中的跳技巧, 得到了违约债券的精确定价公式, 再由无套利原理可得 CDS 的价格公式.

考虑不同随机波动率模型下期权定价问题. 以永久向下敲出看涨期权为例进行讨论快速均值回复 O-U 过程的随机波动率模型下永久美式障碍期权的定价问题. 该期权定价问题可归结于求自由边界问题. 使用扰动法, 把期权价格以及最优执行边界按均值回复时间长度的幂进行展开, 通过求解 Poisson 方程组, 可得期权价格和最优执行边界的渐近公式. 对于波动率服从不同 O-U 过程的随机波动率模型, 以两资产欧式期权为例进行探讨多资产欧式期权的定价问题. 对联合密度函数满足的 Fokker-Plank 方程使用 Fourier 变换, 可得联合密度函数的 Fourier 变换函数满足的偏微分方程. 然后对此 Fourier 变换关于“波动率的波动率”进行二阶泰勒展开可得边缘密度函数的渐近式, 直接计算可得该期权的近似定价公式.

最后探讨了快速均值回复 O-U 过程的随机波动率模型下 Alexandre Ziegler (2004) 中的银行挤兑模型的博弈分析. 为了对银行挤兑进行博弈分析, 需要给出

银行股本的价值, 该股本价值问题对应于永久向下敲出看涨期权的定价问题. 使用第三章的结果, 得到该股本价值的解析渐近公式. 由此渐近公式, 对银行与存款者之间的博弈进行初始融资决策、投资决策、再投资决策的分析.

关键词: 随机利率; 随机波动率; 信用衍生产品; 永久美式障碍期权; 多资产欧式期权; 银行挤兑.

厦门大学博硕士论文摘要库

Credit Derivatives and Options Pricing under Stochastic Volatility Models with Its Applications

ABSTRACT

In this thesis, we apply different approaches for the stochastic interest rate model and the stochastic volatility model to price derivatives. Based on the reduced-form approach, the explicit pricing formula of credit derivatives is derived for the fractional stochastic interest rate model. For the fast mean-reversion Ornstein-Uhlenbeck (O-U) stochastic volatility model, this thesis uses the perturbation method, suggested by Fouque et al. (2000), to present asymptotic formulae of perpetual American barrier options. To the stochastic volatility model with volatilities driven by different O-U processes, we propose an approximate formula for pricing multi-asset European options by using the Fourier transform method with respect to the "volatility of volatility", suggested by Josep et al. (2008). Finally, in the application part of the thesis, the asymptotic formula of perpetual American barrier options newly obtained is applied to bank runs decision.

To a fractional stochastic interest rate model with jump, this thesis investigates the pricing problems of default-risk bonds and credit default swaps (CDSs) for the primary-secondary framework. Based on the reduced-form approach, we derive the explicit pricing formula of defaultable bonds by using properties of the quasi-martingale with respect to the fractional Brownian motion and the jump technique in Park (2008), the CDS is priced by the arbitrage-free principle.

We consider the pricing problems of options under different stochastic volatility models. This thesis, taking the case of the perpetual down-and-out call option for example, discusses a stochastic volatility model for pricing perpetual American barrier options where the volatility is driven by a fast mean reversion O-U process, pricing problem of which can be formulated as a free boundary problem. Using the perturbation method for this option, the price and the optimal exercise boundary of this option

are expanded in the power of the length of mean reversion time, and then, by solving a set of Poisson equations, two asymptotic formulae are derived for this option price and the optimal exercise boundary, respectively. With respect to the stochastic volatility model that the volatilities are driven by different O-U processes, this thesis, taking the case of two asset European options for example, studies the pricing problem of multi-asset European options. We, by using the Fourier transform of joint distribution density function satisfying the Fokker-Plank equation, obtain that the Fourier transform of this function satisfies the partial differential equation (PDE). And then, the approximation of marginal density function is derived by a second-order Taylor series expansion of this Fourier transform with respect to the "volatility of volatility", straightforward calculation yields the approximation of this option price.

In the end, we discuss game analysis for the bank run model in Alexandre Ziegler (2004) under a stochastic volatility model with the assumption that the volatility is driven by a fast mean-reversion Ornstein-Unlenbeck (O-U) process. In order to analyze game for bank runs, we need to provide the value of the bank's equity corresponding to the value of a perpetual down-and-out call option. Thus, we use the results of Chapter Three to present an analytical asymptotic formula for the bank's equity value. And then, based on the newly obtained formula, we analyze the initial funding decision, investment decision and recapitalization decision of the game between bank and depositors.

Key Words: stochastic interest rate; stochastic volatility; credit derivatives; perpetual American barrier options; multi-asset European options; bank runs.

目 录

摘 要	I
ABSTRACT	III
第一章 绪 论	1
§1.1 历史回顾	1
§1.2 衍生产品定价的现状	2
§1.3 本文的记号	5
§1.4 结构安排	5
第二章 分数维随机利率下信用衍生产品的定价	7
§2.1 引言	7
§2.2 预备知识	9
§2.3 模型介绍	10
§2.4 定价违约债券	13
§2.5 定价CDS	19
第三章 在随机波动率下永久美式障碍期权的渐近式	22
§3.1 引言	22
§3.2 模型介绍	23
§3.3 渐近公式	27
第四章 在随机波动率下多资产欧式期权的定价	36

§4.1 引言	36
§4.2 联合密度函数的Fourier 变换的近似公式	37
§4.3 关于 (X_t, Y_t) 的边缘密度函数的渐近式	42
§4.4 多资产欧式期权的价格渐近式	57
第五章 随机波动率下银行挤兑的博弈分析	64
§5.1 引言	64
§5.2 模型介绍	65
§5.3 银行挤兑	69
第六章 结语	75
攻读博士学位期间的研究成果	77
参考文献	79
致 谢	88

CONTENTS

Abstract (in Chinese)	I
Abstract (in English)	III
Chapter 1 Introduction	1
§1.1 Background	1
§1.2 Present situation of derivatives pricing	2
§1.4 Notations	5
§1.5 Outline	5
Chapter 2 Pricing credit derivatives under the fractional stochastic interest rate	7
§2.1 Preliminaries	7
§2.2 Introduction	9
§2.3 The model	10
§2.4 Pricing defaultable bonds	13
§2.5 Pricing CDS	19
Chapter 3 The asymptotic formula of perpetual American barrier options under stochastic volatility	22
§3.1 Preliminaries	22
§3.2 Model settings	23
§3.3 Asymptotic formula	27

Chapter 4 Pricing multi-asset European options under stochastic volatility	36
§4.1 Preliminaries	36
§4.2 Approximating Fourier transform of the joint density function	37
§4.3 Approximating the marginal density function with respect to (X_t, Y_t)	42
§4.4 An asymptotic formula for multi-asset European options	57
Chapter 5 Game analysis for bank runs under stochastic volatility	64
§5.1 Preliminaries	64
§5.2 Model settings	65
§5.3 Bank runs	69
Chapter 6 Conclusions	75
Academic achievements	77
Bibliography	79
Acknowledgements	88

第一章 绪 论

本章首先概述本学位论文所研究问题的相关背景及国内外研究现状, 然后简单介绍一下本文的处理方法、常用记号及结构安排.

§ 1.1 历史回顾

尽管早在古希腊、古罗马和古印度时期就已经有了衍生产品的记载, 但是现代金融理论直到20世纪60年代以后才进入一个蓬勃发展的阶段. 衍生产品定价是金融的一个分支, 现代金融理论和技巧的发展是衍生产品定价的思想基础, 反过来, 衍生产品定价又为金融理论的进一步创新提供了实践的机会. 两者相互作用, 推动了衍生产品定价理论和衍生证券市场的迅速发展. 从历史发展来看, 对衍生产品定价的理论研究主要有:

古希腊时期, 人们已有期权的思想萌芽. 从欧洲16世纪“郁金香球茎热”投机中期权思想的应用到期权正式应用到农业品和工业品保值, 都可以看到这些思想的作用痕迹. 然而, 直到19世纪的后半期, 随着工业革命的完成和市场经济中企业制度的建立, 金融理论进入了蓬勃发展阶段.

1896年, 美国经济学家 Irving Fisher 提出了关于资产的当前价值等于其未来现金流贴值之和的思想. 这一思想对之后的资产定价理论的发展起到了奠基石的作用.

1900年, 法国数学家 Bachelier 在他的博士论文“投机的理论”中首次用布朗运动来描述股票价格的变化, 但在当时有关布朗运动的严格数学理论还未建立. 直到1965年该论文才由著名经济学家 Samuelson 推荐而被金融学界知道.

1952年, Markowitz 发表的著名论文“证券组合分析”, 使用概率论与数理统计的有关理论, 构造了分析证券价格的模型框架. 该论文提出了投资分析的均值-方差分析方法. 在他的模型中, 证券的价格是个随机变量, 证券的价值和风险用这个随机变量的数学期望和方差来度量. 假定经济理性的个体都具有厌恶风

险的倾向, 收益一定时方差(风险)最小的证券组合, 或者方差(风险)一定的情况下收益最大的证券组合. 这一理论为努力寻找这种组合提供了理论依据, 其分析框架构成了现代金融理论分析的基础. 在理论界被称为二十世纪发生在华尔街的第一次金融革命.

到了20世纪60年代, Markowitz 的理论得到了进一步发展, 金融界的从业人员把这些发展的理论应用到资产组合选择和套期保值决策. 1963年, Markowitz 的学生 William Sharp 提出了 Markowitz 的简化方法-单指数模型. 同时, 他还和 Jan Mossin 和 John Lintner 一起创造了资本资产定价模型(简称CAPM), 这一理论与同时的套利定价理论模型(APT)标志着现代金融理论走向成熟.

1973年, Fisher Black 和 Myron Scholes 发表的著名论文-“期权与公司债务定价”, 采用无套利分析方法, 得到了期权价格满足的偏微分方程, 还推导出了一般模型下的期权定价. 同时, Merton 放宽了该公式中的假设, 将模型推广到利率是随机的情况. Black、Scholes 和 Merton 的工作, 为期权等衍生产品交易提供了客观的定价依据, 推动了金融衍生产品工具的快速发展. 之后, Cox 和 Ross 提出了风险中性定价理论. 在这一思想下, 1979年 Harrison 和 Kreps 提出了鞅方法, 利用等价鞅测度定价期权、套期保值、对冲, 对衍生产品定价产生了深远的影响.

到了90年代, 信用风险模型成为金融最新发展的领域, 是从1974年 Merton 提出的公司债期权框架下发展起来的, 提出了结构模型. 随后, Robert Jarrow、Darrell Duffie、Kenneth Singleton 和 Stuart Turnbull 等提出了简约模型与结构模型是截然不同的. 信用风险理论模型的发展为信用衍生产品的发展奠定了基础. 1995年以后, 信用衍生产品市场得到了爆炸性的发展.

§ 1.2 衍生产品定价的现状

自 Black、Scholes 和 Merton 的工作之后, 到现在为止, 大部分的从事期权交易的经纪人还是按照这一模型进行交易估价的, 这两篇文章对期权定价提供了理论基础, 推动了经济增长、世界贸易和资本流通. 但是 Black-Scholes 模型是建立在6个假设的基础上进行推导的, 这就造成了 Black-Scholes 模型是存在缺陷和不符合实际的, 它不能解释多个实证结果, 例如: 微笑曲线、尖峰重尾、随

机波动率的集聚、不完全市场以及, 由于经济中某事件的发生造成的跳跃. 为了克服 Black-Scholes 模型的这些缺陷, 有许多专家学者对 Black-Scholes 模型进行了推广, 其中被业界使用最广、最流行的模型是随机利率模型和随机波动率模型.

§ 1.2.1 随机利率模型

利率是影响金融市场变化的最基本因子, 利率期限结构已经成为金融界既有趣又有挑战性的课题. 自从70年代, 学术界和从业人员对利率期限结构进行了大量的研究, 特别是随机利率模型. 随机利率模型最早是由 Merton 提出来的, 这些模型中最著名的是单因子 Vasicek (1977) 利率模型和 Cox, Ingersoll & Ross (1985) (CIR) 利率模型. Brennan & Schwartz (1977), Hull & White (1990), Longstaff & Schwartz(1992) 以及 Duffie & Singleton (1997) 将 Vasicek 利率模型和 CIR 利率模型推广到两因子模型. 其中, 利率随机波动率模型是两因子模型中最流行, 参看 Frey (1996), Fouque 等 (2000a). Ahn & Thompson (1988) 对利率期限结构首次考虑跳扩散模型, 之后, Bakshi & Madan (2000) 以及 Duffie, Pan 和 Singleton (2000)也考虑利率是由跳扩散过程所驱动的. Huang 等 (2012) 提出了分数维 Vasicek 随机利率模型, 是对经典的 Vasicek 利率模型的推广. 近年来, 利率衍生品市场已经成为世界上最大的衍生品市场, 规模高达数万亿美元.

§ 1.2.2 随机波动率模型

处理不同领域的衍生产品风险要使用不同的随机波动率模型, 这是因为不同的市场微笑或者扭曲来自于不同经济效应. 到目前为止, 许多专家和学术研究者已经提出了大量的随机波动率模型. Wiggins (1987) 提出了波动率的对数服从均值回复 O-U 过程. Stein & Stein (1991) 考虑在波动率遵循均值回复 O-U 过程的情况下期权的定价问题, 且得到了股票价格的解析密度函数, 但波动率过程与股票价格过程是不相关的. Heston (1993) 研究波动率的平方服从类似 CIR 过程的期权定价问题. Fouque 等 (2000a) 提出了快速均值回复随机波动率模型; 几乎同时, Fouque 等 (2000b) 考虑缓慢变化的随机波动率模型; 之后, Fouque 等 (2003a) 研究了多尺度随机波动率模型, 其中波动率由两个随机过程所驱动的, 一个是快速均值回复的随机过程, 一个是缓慢变化的随机过程. Hikspoors &

Jaimungal (2007) 引入双因素均值回复随机波动率模型. 一般情况下, 在随机波动率下衍生产品价格没有精确解, 因而, 大部分文献是进行渐近求解. 对处理相同和不同的随机波动率模型有不同的渐近方法, 其中处理随机波动率模型的渐近方法当下最主要的有以下三种: 扰动法、Fourier 变换技巧、COS 方法.

对于扰动法, Fouque 等 (2000b) 首先使用此方法研究隐含波动率偏态对股本衍生品的影响. 对于快速均值回复随机波动率模型, Fouque 等 (2000a) 探讨了欧式看跌期权、欧式障碍和亚式奇异期权、美式看跌期权、利率衍生产品等定价问题; Cotton (2004) 分析了快速均值回复随机波动率对利率期权结构的影响, 并将此模型推广到债券期权定价; Souza & Zubelli (2007) 将模型应用到战略投资决策, 从数学的角度, 对应于带连续红利率的美式看涨期权的定价问题; Zhu & Chen (2011a) 得到了永久美式看跌期权价格和最优执行价格的渐近公式, 还从定量上分析了随机波动率对此期权价格和最优执行策略的影响. 对于缓慢变化的随机波动率模型, Zhu & Chen (2011b) 考虑永久美式看跌期权定价问题. 对于多尺度随机波动率模型使用多尺度扰动法, Fouque 等 (2003a) 证明了引入缓慢变化因子的原因及此模型能更好的模拟长期限的期权, 并给出了欧式期权、亚式期权的价格渐近公式; Fouque 等 (2006) 考虑违约债券; Wong & Chan (2007) 讨论了固定敲定价格回望期权、浮动敲定价格回望期权及回望复式期权的渐近定价公式, 这可以应用到动态基金保护价格的评估, 这是因为动态基金保护可看成一个双币回望期权; Chen & Zhu (2012) 得到永久美式看跌期权及最优执行价格的渐近公式. 前边提到的文献中关键假设是波动率过程的方差与参数的倒数是 $O(1)$, Souza & Zubelli (2007) 考虑小波动率方差结构, 得到了对应期权的渐近定价公式, 这些修正项分成内解和外解. 关于此模型, 还可以参看 Khasminskii & Yin (2005).

对于 Fourier 变换技巧, 通过逆 Fourier 变换得到密度函数, Heston (1993) 得到了 Heston 随机波动率下期权价格的显式解; Bakshi 等 (1997) 推广到带跳的标的资产价格模型, 给出了期权价格的精确解. Bates (1996) 和 Bakshi & Chen (1997) 考虑货币期权, 并给出了闭形式解; Perello 等 (2008) 研究波动率服从均值回复 O-U 过程下欧式看涨期权的定价问题, 基于特征函数的部分和展开得到此期权价格的近似解; Ould Aly (2014) 通过对密度函数的 Fourier 变换关于“波动

Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士论文摘要库