

基于超拉普拉斯分布的磁化率重建算法

陈人楷,蔡聪波

(厦门大学通信工程系,厦门 361005)

摘要:

定量磁化率成像由于能够定量分析组织内部的顺磁性物质而受到越来越多的关注。然而由局部场反演出磁化率分布的过程是一个病态反问题,在反演过程中,引入合理的先验信息可以提高结果的准确性。为此,提出基于超拉普拉斯分布的磁化率重建算法,实际人脑实验验证该方法在提高结果准确性方面的优越性。

关键词:

定量磁化率成像;病态反问题;超拉普拉斯分布

0 引言

磁化率是表征组织内部被磁化程度的物理量,是组织固有的属性。通过测量组织内部的磁化率值,能够定量测定组织内部顺磁性物质(如铁等)含量,有利于临床上许多神经系统疾病的诊断和治疗^[1]。磁共振信号既包含幅值信息又包含相位信息。其相位信息有着复杂的噪声分布,因而传统的磁共振成像技术通常在诊断中只利用了信号的幅值信息^[2]。随着成像和处理技术的日臻成熟,只需要对相位信息进行一些预处理,就可以得到反映局部磁场变化的磁化率分布。然而在磁化率反演过程中,K空间偶极子核会在锥面区域存在有零值,这使得磁化率重建过程成为了一个病态反问题。为了解决该问题,提出基于磁化率梯度 L_p 范数最小化的正则化方法。相较于之前一些学者提出的基于 L_1 和 L_2 的正则化方法^[1-2],这种方法一方面可以提高图像稀疏度,另一方面其引入的先验信息也更符合真实的磁化率分布。在求解时,利用加权的各项异性 TV (Total Variation) 和各项同性 TV 的差分约束 (Weighted Difference of Anisotropic and Isotropic Total Variation) 去逼近 L_p 范数^[3],并采用 ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers) 和 DCA (Difference of Convex Algorithm) 算法来保证实验结果的收敛性,改善了伪影现象,提高了磁化率反演的精确度。

1 定量磁化率重建算法的基本原理

不同的生物组织有着不同的磁化率值。当在外部施加较高的磁场后,不同生物组织的磁化率差异会导致局部磁场的变化。而局部磁场的变化可以由磁共振信号的相位信息经过一定的预处理来获取。局部磁场与磁化率分布在傅里叶域满足如下关系式^[4]:

$$B(\vec{k})=D(\vec{k}) \cdot X(\vec{k}) \quad (1)$$

其中 $D(\vec{k})=\frac{1}{3}-\frac{k_z^2}{k^2}$, k, k_z 分别是在傅里叶域的坐标和 z 方向的坐标, $B(\vec{k})$ 为局部场 $b(\vec{r})$ 的频谱, $X(\vec{k})$

为磁化率 $X(\vec{r})$ 的频谱。由此可以得到:

$$X(\vec{k})=D^{-1}(\vec{k}) \cdot B(\vec{k}) \quad (2)$$

可以看出 $D(\vec{k})=\frac{1}{3}-\frac{k_z^2}{k^2}$ 在 54.7° (魔角) 附近会出现接近于零值的锥面。如图 1 所示,为 $D(\vec{k})$ 分别在横截面,矢状面和冠状面三个不同切面的剖面图。由图 1

可知, $D(\vec{k})$ 在横截面呈现环状的分布,在矢状面和冠状面均有病态区域出现,这造成了引入的噪声和预处理带来的误差在反演过程中的扩散。

为了解决病态问题,目前通常采用两类方法:基于

多方向采样的方法^[5](COSMOS)和基于单方向采样的正则化方法。COSMOS方法通过多方向采样可以避免魔角的出现,但由于其需要在采样过程中人体转动多个角度,在实际临床上可行性不强,通常只作为实验的参照图来比较一些方法的优劣。基于单方向采样的正则化方法目前提出了基于梯度图像 L1 和 L2 范数的方法。

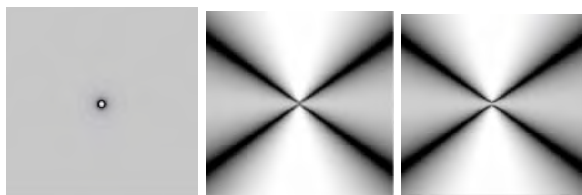


图1 $D(\vec{k})$ 分别在横截面,矢状面和冠状面三个不同切面的示意图

2 基于超拉普拉斯分布的磁化率重建算法

通常医学图像的梯度分布与自然图像梯度分布一样,均近似服从超拉普拉斯分布^[6],因此可以引入 L_p 范数对磁化率图像的梯度进行约束。其目标函数如下所示:

$$x = \min_x \|F^H DFX - b\|_2^2 + \lambda \|Gx\|_{L_p} \quad (3)$$

L_p 范数的求解是非凸问题,这里采用加权的各项异性 TV (Total Variation) 和各项同性 TV 的差分约束 $J(u)$ 来逼近。由于各项异性差分与各项同性差分的求解均为凸问题,解非凸问题也就可以转换成求解凸问题。

其中约束项 $J(u) = J_{ani} - \alpha J_{iso}$, 各项异性差分 $J_{ani} = \|G_x^x\|_1 + \|G_y^x\|_1 + \|G_z^x\|_1$, 各项同性差分 $J_{iso} = \|\sqrt{\|G_x^x\|_2^2 + \|G_y^x\|_2^2 + \|G_z^x\|_2^2}\|_1$ 。权重参数 α 与 p 之间在数学上服从关系式: $\alpha = \frac{\gamma(2/p)}{\sqrt{\gamma(3/p)\gamma(1/p)}}$, 当 $\alpha = 0.5477$ 时, $p = 0.5$ 。原目标函数可以改写为:

$$X = \min_x \|F^H DFX - b\|_2^2 + \lambda (\|G_x^x\|_1 + \|G_y^x\|_1 + \|G_z^x\|_1 - \alpha \langle GX, q^n \rangle) \quad (4)$$

其中 F 和 F^H 分别表示正反傅里叶算子, D 为 K 空间卷积核, X 为所求解的磁化率分布, G 为梯度算子, λ 为正则化参数, $\langle \square \rangle$ 表示为内积, $q^n = (q_x^n, q_y^n, q_z^n) =$

$(G_x^x, G_y^x, G_z^x) / \sqrt{\|G_x^x\|_2^2 + \|G_y^x\|_2^2 + \|G_z^x\|_2^2}$, 当该项分母为 0 时, q^n 项置为 0。

利用 ADMM 和 DCA 算法来求解该约束问题。引入辅助变量 $A = (A_x, A_y, A_z)$, 令 $GX = A$, 则目标函数重新改写为:

$$X = \min_x \|F^H DFX - b\|_2^2 + \lambda (\|G_x^x\|_1 + \|G_y^x\|_1 + \|G_z^x\|_1 - \alpha \langle GX, q^n \rangle) \quad st \quad GX = A \quad (5)$$

约束问题可以进一步松弛为求解非约束的问题, 即:

$$(X_{n+1}, A_{n+1}) = \min_{X,A} \|F^H DFX - b\|_2^2 + \mu \|A - GX - \varphi_n\|_2^2 + \lambda (\|A_x\|_1 + \|A_y\|_1 + \|A_z\|_1 - \alpha \langle A, q^n \rangle) \quad (6)$$

$$\varphi_{n+1} = GX_{n+1} + \varphi_n - A_{n+1} \quad (7)$$

变量 φ 为残差回加项, 其可以加快收敛。上式就变为了关于变量 X 和 A 的两个求解子问题。为获得解析解和加快计算速度, 梯度算子 G 用傅里叶形式表示为:

$$G = F^H E F$$

先固定 A , 设定辅助变量 A 的初始值 $A = (0, 0, 0)$, 计算变量 X :

$$X_{n+1} = \min_x \|F^H DFX - b\|_2^2 + \mu \|A - F^H E F X - \varphi_n\|_2^2 \quad (8)$$

$$FX_{n+1} = (D^2 + \mu E^2)^{-1} [D^H F b + \mu E^H F (A_n - \varphi_n)] \quad (9)$$

再计算辅助变量 A :

$$A_{n+1} = \min_A \mu \|A - GX - \varphi_n\|_2^2 + \lambda (\|A_x\|_1 + \|A_y\|_1 + \|A_z\|_1 - \alpha (A_x^H q_x^n + A_y^H q_y^n + A_z^H q_z^n)) \quad (10)$$

利用软阈值算法求得:

$$A_{n+1} = \max(|GX_{n+1} + \varphi_n + \frac{\lambda}{2\mu} * \alpha * q^{n+1} - \frac{\lambda}{2\mu}, 0) * \text{sign}(GX_{n+1} + \varphi_n + \frac{\lambda}{2\mu} * \alpha * q^{n+1}) \quad (11)$$

其中 sign 为符号函数。通过不断交替迭代求解变量 X 和 A , 直到达到迭代停止条件时, 迭代停止。迭代停止条件为 $(\|FX_{n+1} - FX_n\|_2^2) / (\|FX_n\|_2^2) \leq 1\%$ 。整个算法流程如下所示:

输入: K 空间卷积核 D , 预处理后的局部场 b , 参数 λ 和 μ , maxDCA 和 maxADMM

初始化: $n \leftarrow 0, X \leftarrow 0, A \leftarrow 0, q^n \leftarrow 0$

For 1 to maxDCA do

$$\varphi^n \leftarrow 0$$

For 1 to maxADMM do

$$FX_{n+1} = (D^2 + \mu E^2)^{-1} [DHFb + \mu E^T F(A_n - \varphi_n)]$$

$$A_{n+1} = \max \left(|GX_{n+1} + \varphi_n + \frac{\lambda}{2\mu} * \alpha * q^{n+1}| - \frac{\lambda}{2\mu}, 0 \right) * \text{sign}$$

$$\left(GX_{n+1} + \varphi_n + \frac{\lambda}{2\mu} * \alpha * q^{n+1} \right)$$

$$\varphi_{n+1} = GX_{n+1} + \varphi_n - A_{n+1}$$

End for

$$q^n = (G_x^{X^n}, G_y^{X^n}, G_z^{X^n}) / \sqrt{\|G_x^X\|_2^2 + \|G_y^X\|_2^2 + \|G_z^X\|_2^2}$$

End for $(\|FX_{n+1} - FX_n\|_2^2 / (\|FX_n\|_2^2)) \leq 1\%$

输出: 磁化率分布 X

3 实验与结果分析

3.1 实际人脑实验

该实验用到的脑部数据来源于康奈尔大学的 MRI 实验室 (<http://weill.cornell.edu/mri/pages/qsm.html>), 实验是在 MATLAB 环境下进行的。实验的 FOV (视野) 大小为 $256 \times 256 \times 62 \text{mm}^3$, 分辨率为 $0.9375 \times 0.9375 \times 2 \text{mm}^3$ 。本实验 α 取 0.5, μ 值设定为与 L2 方法的正则化参数相同, 并利用 L-曲线法来确定参数 λ ^[7]。

3.2 实验结果与分析

如图 2(d)(e)(f) 所示, 在实际人脑实验中, 参数 λ 的选择会影响结果的重建质量。当 λ 取值偏小时, 伪影和噪声去除效果不佳, 如图 2(d) 所示。当 λ 取值偏大时, 虽然伪影去除的效果较好, 但同时会造成结果的过度平滑, 从而影响最终磁化率值测量的准确性, 如图 2(e)。为了平衡数据保真项和先验项, 可以采用 L-曲线法。以先验项 $\|GX\|_p$ 为横坐标, 以数据保真项 $\|F^T DFX - b\|_2^2$ 为纵坐标, 画出其曲线拟合图(g), 并计算 L 曲线离散各点的曲率值, 将使曲线曲率值达最大的 λ 值作为理想的参数值, 如图 2(h)。将 COSMOS 数据作为参照图, 比较 L1、L2、Lp 三种不同方法的实验效果, 可以看出采用 Lp 范数的方法在去除伪影现象方面要优于 L2 范数方法, 与 L1 范数方法相当。在(e)图中中间红色箭头所指向的灰白质、深核区域的交界位置, 以(a)图作为

参照可以看出, Lp 范数方法相对于 L1 范数方法, 对比度有了一定的提高。这主要是由于真实的磁化率分布更近似服从超拉普拉斯分布, 这里引入了更为可靠的先验信息所带来的。

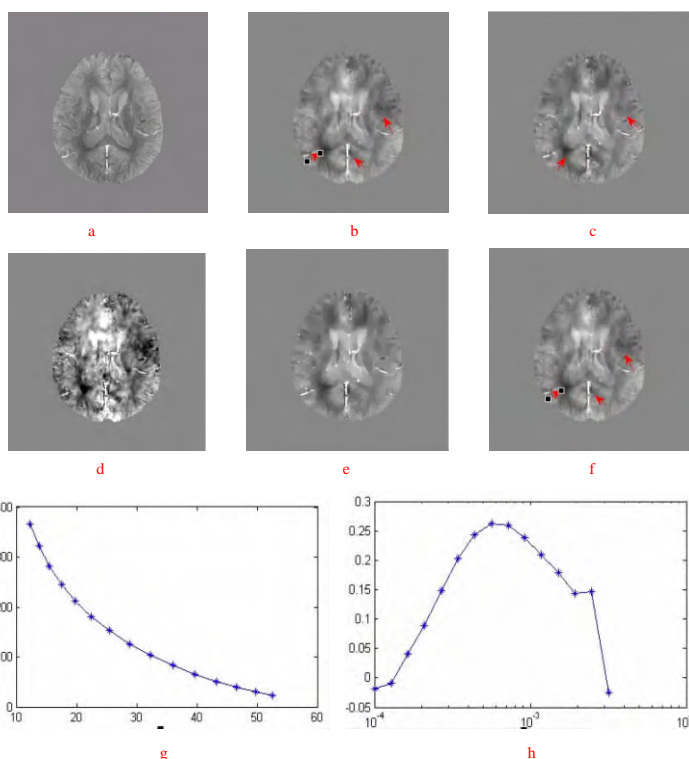


图2 实际人脑实验

(a-c) 分别为 COSMOS, L2, L1 方法反演的磁化率分布图, (d-f) 分别为选择不同正则化参数 λ 反演出的磁化率分布图, (d) 为 λ 取值偏小时的结果图, (e) 为 λ 取值偏大时的结果图, (f) 为 L-曲线法所选择的比较合适的 λ 值, (g)(h) 分别为 L-曲线和曲线曲率图。

4 结语

本文提出了基于超拉普拉斯分布的磁化率重建算法, 并用真实脑部实验来验证。实验结果表明, 该方法相较于传统 L1 和 L2 方法, 可以重建出更为精确的磁化率分布图。这有利于对组织内的顺磁性物质进行定量分析, 在临床上有一定的应用前景。

参考文献:

[1] Bilgic B, Chatnuntawech I, Fan A P, et al. Fast Image Reconstruction with L2-Regularization [J]. Journal of Magnetic Resonance

- Imaging, 2014, 40(1): 181–191.
- [2]Bilgic B, Fan A P, Polimeni J R, et al. Fast Quantitative Susceptibility Mapping with L1-Regularization and Automatic Parameter Selection[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2014,72(5): 1444–1459.
- [3]Yifei Lou, Tiejong Zeng, et al. A Weighted Difference of Anisotropic and Isotropic Total Variation Model for Image Processing[J]. SIAM J. Imaging Sci., 2015, 8(3), 1798–1823.
- [4]Li W, Wu B, Liu C. Quantitative Susceptibility Mapping of Human Brain Reflects Spatial Variation in Tissue Composition[J]. Neuroimage, 2011, 55(4): 1645–1656.
- [5]Liu T, Spincemaille P, de Rochefort L, et al. Calculation of Susceptibility Through Multiple Orientation Sampling (COSMOS)[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2009, 61(1): 196–204.
- [6]Per Christian Hansen. Computational Inverse Problems in Electrocardiology[M]. Southampton: WIT Press, 2001: 119–142.
- [7]Yuanhao Gong. Spectrally Regularized Surfaces[D]. Zürich: ETH-Zürich, 2015: 64–70.

作者简介:

陈人楷(1990-),男,福建福州人,在读硕士研究生,研究方向为医学图像处理

蔡聪波(1975-),男,福建泉州人,博士,硕士生导师,副教授,研究方向为医学图像处理、磁共振成像及波谱

收稿日期:2016-03-11

修稿日期:2016-04-18

Magnetic Susceptibility Reconstruction Algorithm Using Hyper-Laplacian Priors

CHEN Ren-kai, CAI Cong-bo

(Department of Communication Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005)

Abstract:

There is a growing interest in quantitative susceptibility mapping because it is being used for quantifying tissue susceptibility in magnetic resonance imaging. However, the estimation of magnetic susceptibility from phase is an ill-posed problem. Introduce a more accurate prior information in order to improve the accuracy of experimental results. Proposes a magnetic susceptibility reconstruction algorithm based on Hyper-Laplacian priors. The numerical phantom experiment and vivo experiment both confirm that the proposed method can accurately measure susceptibility.

Keywords:

Quantitative Susceptibility Mapping; Ill-posed Problem; Hyper-Laplacian Priors