

以理想玻色气体为工质的 量子 Ericsson 制冷循环

何济洲

(南昌大学数理学院, 330029) (厦门大学物理系, 361005)

摘要: 文中基于理想玻色气体的状态方程, 分析了以理想玻色气体为工质的量子 Ericsson 制冷循环中的回热特征, 推导出其制冷循环的制冷系数表达式. 并在高温和低温条件下对制冷系数进行了讨论. 这将对低温气体制冷机的研究提供理论依据.

关键词: 玻色气体 Ericsson 制冷循环 回热 制冷系数

1 引言

Ericsson 制冷循环是一种重要的回热式制冷循环之一, 它是由两个等温过程和两个等压或等磁场过程组成. 当使用经典的理想气体为工质时, 该循环具有理想回热, 它的制冷系数等于卡诺制冷系数; 当使用铁磁质为工质时, 该循环不具有理想回热, 它的制冷系数小于卡诺制冷系数^[1-3].

但是当工作物质处在低温或超低温的条件下, 就必须考虑量子效应, 因而它的制冷系数的表达式也将不同于经典的表达式. 这将涉及到量子热力学循环问题. 近年来, 一些文献对量子热力学循环作了有益的研究^[4-9], 其工作物质涉及到自旋 1/2 系统、谐振子系统、费米子和玻色子系统、势阱中的微观粒子系统等.

本文对以理想玻色气体 ^4He 为工作物质的量子 Ericsson 制冷循环进行了研究. 基于理想玻色气体的状态方程, 我们发现该制冷循环不具有理想回热, 并推导出制冷系数的普遍表达式. 在很高温度条件下, 其结果回到经典的卡诺制冷系数; 在低温条件下得到了制冷系数的具体表达式, 这将对低温气体制冷机的研究提供理论依据.

2 理想玻色气体的状态方程

根据量子统计物理^[10], 理想玻色气体的压强和粒子数密度分别为

$$P = \frac{kT}{\lambda^3} g_{5/2}(z) \quad (1)$$

$$\frac{N - N_0}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) \quad (2)$$

其中 λ 为平均热波长, k 是玻尔兹曼常数, T 为气体的温度, N 为粒子总数, N_0 为基态粒子数, V 为气体体积, $g_n(z)$ 称为玻色积分. 其平均热波长和玻色积分的定义分别为

$$\lambda = h / (2\pi m kT)^{1/2}, \quad g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{z^{-1} e^x - 1}$$

* 本文于 2001 年 9 月 19 日收到.

其中 $z = \exp(-\mu/kT)$ 称为逸度, $\Gamma(x)$ 称为伽玛函数, h 为普朗克常数, m 为玻色子的质量, μ 为气体的化学势。

由方程 (1) 和 (2), 我们可以得到玻色气体的状态方程

$$P = nkT C F(z) \tag{3}$$

其中 n 为粒子数密度

$$C F(z) = \frac{g^{5/2}(z)}{g^{3/2}(z)}, \quad T > T_c \tag{4}$$

$$C F(z) = 0.5135 \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}, \quad T < T_c \tag{5}$$

称为修正因子, T_c 为玻色-爱因斯坦凝聚温度, 其值与压强的关系为

$$T_c(P) = \frac{(h^2/2gm)^{3/5} P^{2/5}}{k [Y(5/2)]^{2/5}} = A P^{2/5} \tag{6}$$

这里 $Y(x)$ 为 Riemann-Zeta 函数

理想玻色气体的内能和热容为^[9] $U = \frac{3}{2} N k T \frac{g^{5/2}(z)}{g^{3/2}(z)} = \frac{3}{2} N k T C F(z)$ (7)

$$C_v = \frac{15}{4} N k \frac{g^{5/2}(z)}{g^{3/2}(z)} - \frac{9}{4} N k \frac{g^{3/2}(z)}{g^{1/2}(z)} = \frac{3}{2} N k \frac{d}{dT} [T C F(T, \nu)] \tag{8}$$

利用热力学关系 $C_p = C_v + T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ (9)

和方程 (3) - (4), 我们可以得到定压热容

$$C_p = \frac{25}{4} N k \frac{g^{5/2}(z) f_{1/2}(z)}{g^{3/2}(z)} - \frac{15}{4} N k \frac{g^{5/2}(z)}{g^{3/2}(z)} = \frac{5}{2} N k \frac{d}{dT} [T C F(T, P)] \tag{10}$$

3 量子等温过程和量子等压过程中的热量和熵

根据热力学第一定律: $dQ = T dS = dU + P dV$ (11)

和方程 (3), (7), (10), 我们能够推导出等温过程和等压过程的热量, 它们分别为

$$Q_{if}^T = \Delta U + \int_i^f P dV = \frac{5}{2} N k T [C F(T, P_f) - C F(T, P_i)] - N k T \int_i^f \frac{C F(T, P)}{P} dP \tag{12}$$

$$Q_{if}^P = \int_i^f C_p(T, P) dT = \frac{5}{2} N k T [T_f C F(T_f, P) - T_i C F(T_i, P)] \tag{13}$$

其中下标 i 和 f 分别代表初始和终止状态。

同理, 我们可推导出等温过程和等压过程的熵, 它们分别为

$$S_{if}^T = \frac{5}{2} N k [C F(T, P_f) - C F(T, P_i)] - N k \int_i^f \frac{C F(T, P)}{P} dP \tag{14}$$

$$S_{if}^P = \frac{5}{2} N k [C F(T_f, P) - C F(T_i, P)] + \frac{5}{2} N k \int_i^f \frac{C F(T, P)}{T} dT \tag{15}$$

利用方程 (12) 和 (13), 我们可以分析量子 Ericsson 制冷循环中的热量。

4 量子 Ericsson 制冷循环

当工作物质为玻色气体时, Ericsson 制冷循环由两个等温过程和两个等压过程组成, 如

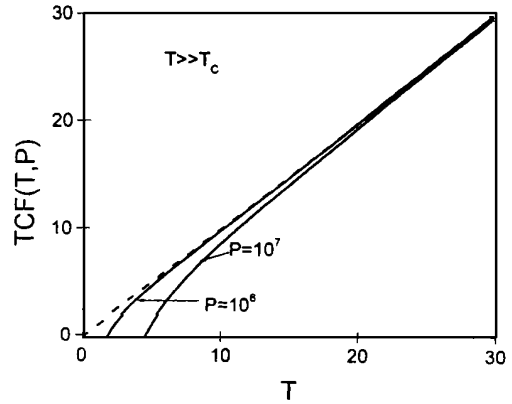
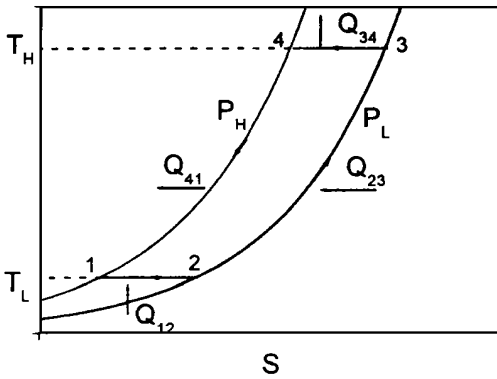


图 1 Ericsson 制冷循环中熵与温度的示意图

图 2 高温下 $TCF(T, P)$ 与温度的关系图

图 1 为它的温熵示意图, 其中 Q_{12} 和 Q_{34} 分别为两个等温过程的热量, Q_{23} 和 Q_{41} 分别为两个等压过程(回热过程)的热量, T_H 和 T_L 分别为高低热源的温度, P_H 和 P_L 分别为高低压强. 由公式 (12) 和 (13), 我们得到各过程的热量表达式

$$Q_{12} = \frac{5}{2} N k T_L [CF(T_L, P_L) - CF(T_L, P_H)] + N k T_L \int_{P_L}^{P_H} \frac{CF(T_L, P)}{P} dP \quad (16)$$

$$Q_{34} = \frac{5}{2} N k T_H [CF(T_H, P_H) - CF(T_H, P_L)] - N k T_H \int_{P_L}^{P_H} \frac{CF(T_H, P)}{P} dP \quad (17)$$

$$Q_{23} = \frac{5}{2} N k [T_H CF(T_H, P_L) - T_L CF(T_L, P_L)] \quad (18)$$

$$Q_{41} = \frac{5}{2} N k [T_L CF(T_L, P_H) - T_H CF(T_H, P_H)] \quad (19)$$

从公式 (18) 和 (19), 我们可以得到净回热量

$$\begin{aligned} \Delta Q &= Q_{23} - Q_{41} \\ &= \frac{5}{2} N k \{ T_H [CF(T_H, P_L) - CF(T_H, P_H)] + T_L [CF(T_L, P_H) - CF(T_L, P_L)] \} \end{aligned} \quad (20)$$

当 $\Delta Q > 0$ 时, 说明流入回热器的热量 Q_{41} 小于流出回热器的热量 Q_{23} , 那么回热器中不足的热量必须从高温热源补充, 否则回热器的温度将改变, 以致于回热器不能正常工作. 这时制冷系数的表达式为

$$\begin{aligned} X_c &= \frac{Q_{12}}{|Q_{34}| - Q_{12} - \Delta Q} \\ &= \frac{\frac{5}{2} N k T_L [CF(T_L, P_L) - CF(T_L, P_H)] + N k T_L \int_{P_L}^{P_H} \frac{CF(T_L, P)}{P} dP}{N k T_H \int_{P_L}^{P_H} \frac{CF(T_H, P)}{P} dP - N k T_L \int_{P_L}^{P_H} \frac{CF(T_L, P)}{P} dP} \end{aligned} \quad (21)$$

当 $\Delta Q < 0$ 时, 说明流入回热器的热量 Q_{41} 大于流出回热器的热量 Q_{23} , 那么回热器中多余的热量必须放给低温热源, 否则回热器的温度将改变, 以致于回热器不能正常工作. 这时

制冷系数的表达式为

$$\begin{aligned} X_c &= \frac{Q_{12} - |\Delta Q|}{|Q_{34}| - Q_{12} + |\Delta Q|} \\ &= \frac{\frac{5}{2} N k T_H [CF(T_H, P_L) - CF(T_H, P_H)] + N k T_L \int_{P_L}^{P_H} \frac{CF(T_L, P)}{P} dP}{N k T_H \int_{P_L}^{P_H} \frac{CF(T_H, P)}{P} dP - N k T_L \int_{P_L}^{P_H} \frac{CF(T_L, P)}{P} dP} \end{aligned} \quad (22)$$

公式 (21)和 (22)就是以理想玻色气体为工质的量子 Ericsson 制冷循环的制冷系数的一般表达式 利用它们可以讨论高温和低温情况下制冷系数的表达式

5 讨论

1) 在高温和低密度情况下, 即在气体弱简并条件下, 玻色函数 $g_n(z)$ 可以展开为

$$g^{5/2}(z) = z + \frac{z^2}{2^{5/2}} + \frac{z^3}{3^{5/2}} + \dots, \quad (23)$$

$$g^{3/2}(z) = z + \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} + \dots. \quad (24)$$

由公式 (4), (23)和 (24), 我们可以推导出以温度和压强为变量的修正因子表达式

$$CF(T, P) = \frac{T^{5/2}}{T^{5/2} + BP}, \quad (25)$$

其中 $B = (2ch^2/m)^{3/2} / (4\sqrt{2}k^{5/2})$.

根据公式 (25), 我们可以作出在不同的压强下 ($P = 10^7$ 帕斯卡和 $P = 10^6$ 帕斯卡) $TCF(T, P)$ 与温度的关系图, 如图 2所示. 利用公式 (10)并比较曲线的斜率, 可以发现下列关系

$$C_p(T, P_H) > C_p(T, P_L), \quad (26)$$

它说明在高等压强过程下流入回热器的热量是大于在低等压强过程下流出回热器的热量. 因此将公式 (25)代入公式 (22), 在一级近似条件下可以得到制冷系数为

$$X_c = \frac{T_L \ln(P_H/P_L) + (B/T_L^{3/2} - 5B/2T_H^{3/2})(P_H - P_L)}{(T_H - T_L) \ln(P_H/P_L) + B(P_H - P_L)[(1/T_H^{3/2}) - (1/T_L^{3/2})]} \quad (27)$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时, $CF(T, P) \rightarrow 1$, 说明理想玻色气体回到经典理想气体的行为. 这时从公式 (27)可知制冷系数为 $X_c = \frac{T_L}{T_H - T_L} = X$ (28)

与经典理想气体卡诺制冷循环的制冷系数相同.

2) 在低温和高密度情况下, 即在气体强简并条件下, 修正因子由公式 (5)给出. 根据公式 (5), 我们可以作出在不同的压强下 ($P = 10^7$ 帕斯卡和 $P = 10^6$ 帕斯卡) $TCF(T, P)$ 与温度的关系图, 如图 (3)

所示. 利用公式 (10)并比较曲线的斜率, 可以发现下列关系

$$C_p(T, P_H) < C_p(T, P_L) \quad (29)$$

它也说明在高等压强过程下流入回热器的热量是小于在低等压强过程下流出回热器的热量. 因此将公式 (5)代入公式 (21), 在一级近似条件下可以得到制冷系数为:

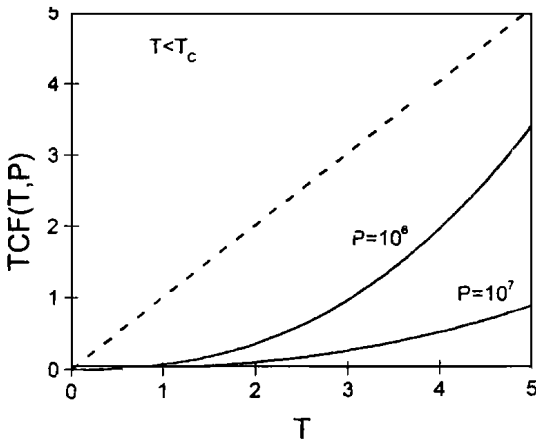


图 3 低温下 $TCF(T, P)$ 与温度的关系图

冷循环的制冷系数相同。本文在低温下的结果会对低温气体制冷机的研制提供理论指导。

参 考 文 献

- [1] Y Zijun, C Jincan, J Appl Phys., 1992 72(1): 1
- [2] 何济洲. 低温工程, 1996 89(1): 52
- [3] 何济洲. 低温与超导, 1999 27(3): 63
- [4] Geva E, Kostoff R. J Chem. Phys., 1992 97 4398
- [5] Geva E, Kostoff R. J Chem. Phys., 1992 96 3054
- [6] Sisman A, Saygin H. J. Phys. D: Appl Phys., 1999 32 664
- [7] Bender C M, Brody D C, Meister B K. J Phys A: Math Gen., 2000 33 4427
- [8] Kostoff R, Geva E. Journal of Applied Physics. 2000 87: 8098
- [9] Sisman A, Saygin H. Applied Energy, 2001 68 367
- [10] 北京大学物理系编. 量子统计物理学, 北京: 北京大学出版社, 1987 88

Quantum Ericsson Refrigeration Cycle Working With The Ideal Fermi Gas

He Jizhou

(Department of Physics Nanchang University, 330029)

(Department of Physics Xiamen University, 361005)

ABSTRACT Based on the equation of the ideal Bose gas, the regenerative characteristics of the quantum Ericsson refrigeration cycle working with the ideal Bose gas is analyzed. Its coefficient of the performance is derived. Two special cases in the high- and low-temperature are discussed. These results will be significant for the research of gas refrigerators in the low temperature.

KEYWORDS Bose gas, Ericsson refrigeration cycle, Regenerative heat, Coefficient of performance.

$$\chi = \frac{T_L^{5/2}}{2(T_H^{5/2} - T_L^{5/2})} < \chi_c \quad (30)$$

6 结论

从上面的讨论可知, 无论在高温还是在低温条件下, 以理想玻色气体为工质的量子 Ericsson 制冷循环都不具有理想回热条件。高温时净回热量 $\Delta Q < 0$; 低温时净回热量 $\Delta Q > 0$, 这样它的制冷系数将小于卡诺制冷循环的制冷系数。当温度趋向很高时, 理想费米气体就可看成经典理想气体, 所以其制冷系数与卡诺制