3族新的不含紧优与几乎紧优的有向双环网络无限族

陈宝兴[1,2] 杜 妮[2]
(1 漳州师范学院计算机科学系, 福建 漳州 363000; 2 厦门大学数学系, 福建 厦门 361005)

摘 要 给出了 3族新的不含紧优与几乎紧优的有向双环网络.
关键词 有向双环网络; 直径; 紧优; 几乎紧优
中图分类号 O 157.9 文献标识码 A

双环网络具有如下优点: 网络直径较小, 易于扩展, 具有对称性且有一定的容错能力. 因而这类网络广泛应用于计算机网, 局域网及大规模并行处理系统. 双环网络的寻径策略研究[1,2,9], 构造最优双环网络[3-7]及其网络的直径估计[8]一直是受到关注的研究课题.

双环网络 $G(n;1,s)$ 是如下定义的有向图: 其结点集是: $V=Z_n=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$, 边集是 $E=\{i\to i+1 \pmod n, i\to i+s \pmod n \mid i=0,1,2,\cdots,n-1\}$. 令 $d(i,j)$ 为从结点 i 到结点 j 的最短路径的长度. $G(n;1,s)$ 的直径 $d(n;1,s)=\max\{d(i,j)\mid 0\le i,j<n\}$. 因为 $G(n;1,s)$ 是点对称的, 所以 $d(n;1,s)=\max\{d(i,0)\mid 0\le i<n\}$. 令 $lb(n)=[\sqrt{3n}]-2$, 这里 $[x]$ 表示大于或等于 x 的最小整数. 令 $D(n)=\min\{d(n;1,s)\mid 2\le s<n/2\}$. Wong 与 Coppersmith[8]给出了 $D(n)$ 的一个紧的下界 $lb(n)$.

如果 $d(n;1,s)=D(n)=lb(n)+k$, 则称双环网络 $G(n;1,s)$ 是 k-紧优的, 此时也称 n 为 k-紧优的. 我们有时也称 0-紧优的为紧优的, 1-紧优的为几乎紧优的. 徐俊明在文献 [3]给出了两族不含紧优和几乎紧优的有向双环网络无限族, 本文将给出 3族新的不含紧优和几乎紧优的有向双环网络无限族.

1 定义和引理

为了研究双环网络的直径, 文献 [8](参见 [3,4]) 提出了如下的构图: 在笛卡尔平面直角坐标系中, 第一象限中的所有格点 (x,y) 按下列顺序排成序列: $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $\cdots$, $(j,0)$, $(j-1,1)$, $(j-2,2)$, $\cdots$, $(j-i,i)$, $\cdots$, $(1,j-1)$, $(0,j)$, $\cdots$. 每个格点用它右上角的单位方格为代表, 并且依次在每一方格 (x,y) 处放置数 $k\in\{0,1,2,$

* 收稿日期: 2005-04-08
基金项目: 福建省教育厅科技计划项目资助 (JA 04249)

$\cdots, n-1\}$, 其中 $k\equiv x+ys \pmod n$. 如在此前数 k已出现过, 则空出此方格, 考察下一个格点, 直到数 $0, 1, 2, \cdots, n-1$都出现为止. 易知若数 k位于方格 (x, y)处, 则 $G(n; 1, s)$中从结点 0到结点 k的距离是 $x+y$. 文献 [8]证明了上述构图呈 L形 (矩形是特例).

定义 1　如图 1所示, 由 $G(n; 1, s)$所确定的 n个方格组成的 L-形区域称为具有参数 (l, h, x, y)的一个 L-形瓦, 其中 l, h, x, y都是整数, 且 $l, h\geq 2, 0\leq x<l, 0\leq y<h$. 这个 L-形瓦记为 $L(n; l, h, x, y)$. 令 $D(L(n; l, h, x, y)) = \max\{l+h-x-2, l+h-y-2\}$, 并称之为 $L(n; l, h, x, y)$的直径. 若 $D(L(n; l, h, x, y)) = lb(n)+k$, 则称 L-形瓦 $L(n; l, h, x, y)$是 k-紧的.

定义 2　L-形瓦 $L(n; l, h, x, y)$称为可实现的, 若存在一个有向双环网络 $G(n; 1, s)$, 使得由 $G(n; 1, s)$确定的 L-形瓦就是 $L(n; l, h, x, y)$.

易知 $d(n; 1, s) = \max\{l+h-x-2, l+h-y-2\}$. 图 2为双环网络 $G(10; 1, 4)$的 L-形瓦.

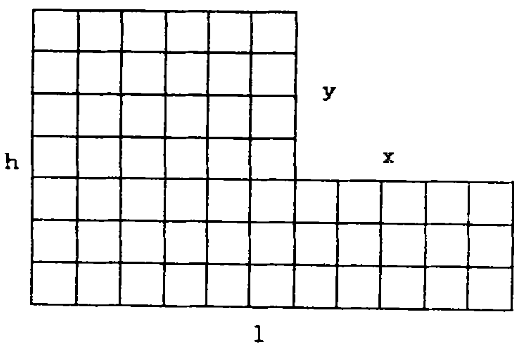

图 1　$L(n; l, h, x, y)$

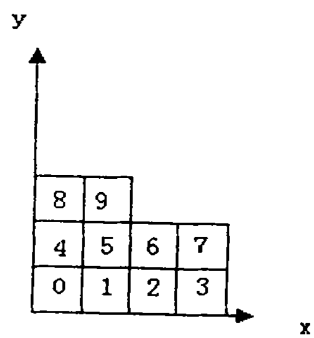

图 2　$G(10; 1, 4)$

引理 1[4]　设 $L = L(n; l, h, x, y)$. 若 $z = |y-x|\geq 1$, 则

$$D(L)\geq \sqrt{3n-0.75z^2}+0.5z-2$$

引理 2[4]　对任何正整数 n, 必存在 $t\in Z$ (非负整数集), 使得 $n\in I_1(t)\cup I_2(t)\cup I_3(t)$, 其中: $I_1 = [3t^2+1, 3t^2+2t]$, $I_2 = [3t^2+2t+1, 3t^2+4t+1]$, $I_3 = [3t^2+4t+2, 3t^2+6t+3]$, 并且对每个 $i = 1, 2, 3$, $n\in I_i(t)$当且仅当 $lb(n) = 3t+i-2$.

引理 3[4]　设 $n = 3t^2+At+B\in I_i(t)$, $L(n; l, h, x, y)$是 k-紧的 L-形瓦, 其中 $l = 2t+a$, $h = 2t+b$, $x = t+a+b-j$, 这里 $j = i+k$, a, b是整数. 令 $z = |y-x|$. $L(n; l, h, x, y)$是 k-紧的当且仅当

$$(a+b-j)(a+b-j+z)-ab+(A+z-2j)t+B=0$$

而且若存在 T和 U, 使得 $Ty+U(h-y)=1$, 则存在唯一的双环网络 $G(n; 1, s)$, 其中 $s\equiv Tl-U(h-y) \pmod n$.

引理 4[4]　L-形瓦 $L(n; l, h, x, y)$是可实现的充要条件是 h, y是互素的.

仿照文献 [7], 可证下述的引理 5

引理 5　设 $n = 3t^2+At+B\in I_i(t)$, 令 $H_{z,j} = (2j-z)^2-3[j(j-z)+(A+z-$

$2j)t+B]$. 若关于 a, b 的不定方程(1)有整数解, 则 $4H_{z,j}$ 可表为 s^2+3m^2 的形式, 这里 $s, m \in Z$.

引理 6[7] 若 $4H_{z,j}$ 可表为 s^2+3m^2 的形式, 这里 $s, m \in Z$ 且 $4H_{z,j}$ 有素因子 $p=2$ 或者 $p \equiv 5 \pmod 6$, 则 p 在 $4H_{z,j}$ 的素因子分解中有偶次幂.

引理 7 若 $4H_{z,j} \equiv 2 \pmod 6$, 则不存在两个非负整数 s, m, 使得 $4H_{z,j}=s^2+3m^2$.

证明 用反证法, 若存在两个非负整数 s, m, 使得 $4H_{z,j}=s^2+3m^2$, 则因 $4H_{z,j}$ 是偶数, 可知 s, m 的奇偶性相同.

情形 1 若 s, m 均为偶数, 则 $3m^2 \equiv 0 \pmod 6$ 且 $s^2 \equiv 0 \pmod 6$ 或 $s^2 \equiv 4 \pmod 6$. 因此 $s^2+3m^2 \not\equiv 2 \pmod 6$.

情形 2 若 s, m 均为奇数, 则 $3m^2 \equiv 3 \pmod 6$ 且 $s^2 \equiv 1 \pmod 6$ 或 $s^2 \equiv 3 \pmod 6$. 因此 $s^2+3m^2 \not\equiv 2 \pmod 6$.

上面两种情形均与 $s^2+3m^2 \equiv 2 \pmod 6$ 矛盾!

2 主要结果

定理 1 $\{n \mid n=3t^2+2t-126, t=210e+172, e \in Z\}$ 是不含紧优与几乎紧优的无限族.

证明 对于 $n=3t^2+2t-126$, $t=210e+172$, 这里 $e \in Z$. 若 L-形瓦 $L(n; l, h, x, y)$ 是 0-紧的, 则 $z=|x-y|=0$. 若 $z \geq 1$, 则当 $t \geq 172$ 时, $D(L) \geq \sqrt{3n-0.75}+0.5-2=\sqrt{9t^2+6t-378.75}-1.5=\sqrt{(3t+0.5)^2+3t-379}-1.5>3t+0.5-1.5=3t-1=lb(n)$. 这与 $L(n; l, h, x, y)$ 是 0-紧的矛盾!

令 $l=2t+a$, $h=2t+b$, 则 $x=y=t+a+b-1$. 由 $n=lh-xy$, 可得

$$(a+b-1)(a+b-1)-ab-126=0 \tag{1}$$

不定方程(1)的整数解为: $(-9, -2)$, $(-2, -9)$, $(13, -9)$, $(-9, 13)$, $(13, -2)$, $(-2, 13)$.

当 $a=-9$, $b=-2$ 时, $l=420e+335$, $h=420e+342$, $x=y=210e+160$. 因为 h, y 不互素, h, x 不互素, 所以 L-形瓦 $L(n; l, h, x, y)$ 与 $L(n; l, h, y, x)$ 均是不可实现的.

当 $a=13$, $b=-9$ 时, $l=420e+357=7(60e+51)$, $h=420e+335$, $x=y=210e+175=7 \times 5 \times (6e+5)$. 因为 h, y 不互素, h, x 不互素, 所以 L-形瓦 $L(n; l, h, x, y)$ 与 $L(n; l, h, y, x)$ 均是不可实现的.

当 $a=13$, $b=-2$ 时, $l=420e+357=7(60e+51)$, $h=420e+342=2(210e+171)$, $x=y=210e+182=7 \times 2 \times (15e+13)$. 因为 h, y 不互素, h, x 不互素, 所以 L-形瓦 $L(n; l, h, x, y)$ 与 $L(n; l, h, y, x)$ 均是不可实现的.

当 $a=-2$, $b=-9$, 或者 $a=-9$, $b=13$, 或者 $a=-2$, $b=13$ 时, 可类似讨论.

由上面的讨论, 可知 0-紧的 L-形瓦 $L(n; l, h, x, y)$ 是不可实现的.

现证 $\{n \mid n=3t^2+2t-126, t=210e+172, e \in Z\}$ 是不含 1-紧优的无限族.

若 L-形瓦 $L(n; l, h, x, y)$ 是 1-紧的, 则 $z=|x-y| \leq 2$. 若 $z \geq 3$, 则当 $t \geq 172$ 时, $D(L) \geq \sqrt{3n-6.75}+1.5-2=\sqrt{9t^2+6t-384.75}-0.5=\sqrt{(3t+0.5)^2+3t-385}-0.5>3t+0.5-0.5=3t=lb(n)+1$. 这与 $L(n; l, h, x, y)$ 是 1-紧的矛盾!

若 $z=0$, 令 $l=2t+a$, $h=2t+b$, 则 $x=y=t+a+b-2$. 由 $n=lh-xy$, 可得

$$(a+b-2)(a+b-2)-ab-2t-126=0 \tag{2}$$

令 $4H_{0,2}=4[16-3(4-2t-126)]$, 则 $4H_{0,2}=8\times 7\times(90e+101)$.

因为 2在 $4H_{0,2}$ 的素因子分解中是 3次幂, 所以据引理 3, 引理 5与引理 6, 可知不定方程 (2) 无整数解.

若 $z=1$, 令 $l=2t+a$, $h=2t+b$, 则 $x=t+a+b-2$, $y=t+a+b-1$. 由 $n=lh-xy$, 可得

$$(a+b-2)(a+b-1)-ab-t-126=0 \tag{3}$$

令 $4H_{1,2}=4[9-3(2-t-126)]$, 则 $4H_{1,2}=4\times 3\times(210e+299)$.

因为 $4(210e+299)\equiv 2(\mathrm{mod}\ 6)$, 所以据引理 7, 可知 $4(210e+299)$ 不可表为 s^2+3m^2 的形式, 这里 $s, m\in Z$. 从而 $4H_{1,2}$ 也不可表为 s^2+3m^2 的形式. 如此根据引理 3, 引理 5, 可知不定方程 (3) 无整数解.

若 $z=2$, 令 $l=2t+a$, $h=2t+b$, 则 $x=t+a+b-2$, $y=t+a+b$. 由 $n=lh-xy$, 可得

$$(a+b-2)(a+b)-ab-126=0 \tag{4}$$

令 $4H_{2,2}=4[4-3(-126)]$, 则 $4H_{2,2}=8\times 191$.

因 2在 $4H_{2,2}$ 的素因子分解中是 3次幂, 所以据引理 3, 引理 5与引理 6, 可知不定方程 (4) 无整数解.

由上面可知不存在 1-紧的 L-形瓦 $L(n; l, h, x, y)$. 于是定理 1成立.

类似地可证下述的定理 2, 定理 3.

定理 2 $\{n \mid n=3t^2+2t-37, t=300e+45, e\in Z\}$是不含紧优与几乎紧优的无限族.

定理 3 $\{n \mid n=3t^2+6t-25, t=100e+49, e\in Z\}$是不含紧优与几乎紧优的无限族.

3 结束语

从文献 [5, 7]可看出, 欲寻找或构造一个 k-紧优的 $(k\geq 2)$ 双环网络, 并不是一件容易的事情. 我们猜测定理 1中的无限族是 2-紧优的.

另外, 注意到当 $6128=3\times 45^2+2\times 45-37$是 2-紧优的, 而当 $357728=3\times 345^2+2\times 345-37$是 3-紧优的. 还有当 $7472=3\times 49^2+6\times 49-25$是 2-紧优的, 而当 $607472=3\times 449^2+6\times 449-25$是 3-紧优的. 因此一个值得考虑的问题是: 可否从定理 2, 定理 3中的无限族中找出一个 3-紧优的 (或 2-紧优的) 双环网络无限子族?

参 考 文 献

[1] 冯斐玲, 金林钢. 一类双环网的特征分析及寻径控制. 计算机学报, 1994, 17(11): 859-865

[2] 陈协彬. 一类双环网络的最优路由算法. 漳州师范学院学报, 2002, 15(3): 1-5.

[3] 徐俊明. 不含紧优和几乎紧优双环网络无限族. 科学通报, 1999, 44(5): 486-490

[4] 李乔, 徐俊明, 张忠良. 最优双环网络的无限族. 中国科学 (A), 1993, 23(9): 979-992

[5] 徐俊明. 2紧优双环网络无限族. 高校应用数学学报 (A), 2000, 15(2): 147-151.

[6] 刘焕平,杨义先,胡铭曾. 最优双环网的构造. 系统工程理论与实践, 2001年 12月, 72-75

[7] 徐俊明,刘琦. 一类 4紧优双环网无限族. 中国科学(A), 2003, 33(1): 71-74

[8] Wong C K, Coppersmith D. A combinatorial problem related to multimodule memory organizations. J. ACM, 1974, 21: 392-402

[9] 陈宝兴,肖文俊. 一类无向双环网络的最优路由算法. 厦门大学学报(自), 2004年第 2期.

Three New Infinite Families of Directed Double Loop Networks Which Not Containing Optimal and Almost Optimal Networks

Chen Baoxing[1,2] *Du Ni*[2]

(1 Department of Computer Science, Zhangzhou Teacher's College, Zhangzhou Fujian 363000;
2 Department of Mathematics Xiamen University, Xiamen Fujian 361005)

Abstract Three new infinite families of directed double loop networks which not containing tight optimal and almost tight optimal are given in this paper.

Key Words directed double loop networks; diameter; tight optimal; almost tight optimal

(上接第 217页)

参 考 文 献

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. Macmillan London and Elsevier, New York, 1976

[2] Wang Jianglu, Zhu Yongjin. Path extensibility of connected, locally 2-connected $K_{1,3}$-free graphs. Systems Science and Math. Sciences, 1996, 10: 267-274

$K_{1,p}$-restricted Graphs

You Haiyan *Wang Jianglu*

(Department of Mathematics, Shandong Normal University, Jinan 250014)

Abstract A subgraph isomorphic to $K_{1,p}$ is a graph G is called a p-claw of G ($p \geq 3$). A graph G is said to be $K_{1,p}$-restriced if the number of the edges (in G) among vertices with degree 1 in H, for any p-claw H in G, is at least $p-2$. Clearly, evry claw-free graph is $K_{1,p}$-restricted. We prove that every connected, locally 3-connected $K_{1,4}$-restricted graph is path extendable.

Key Words $K_{1,p}$-restricted graph; locally k-connected graph; path extendable graph