第 43 卷 第 5 期
2004 年 9 月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol. 43 No. 5
Sep. 2004

·研究简报·

文章编号: 0438-0479(2004)05-0736-02

具非负曲率的完备黎曼流形上核心的性质

詹华税
(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 讨论了具非负曲率的完备非紧黎曼流形上的核心的结构, 证明了如果核心是惟一的, 那么核心将退化为极点.

关键词: 完备非紧黎曼流形; 非负曲率; 核心; 极点
中图分类号: O 186.12 文献标识码: A

设 M 为完备非紧具非负曲率黎曼流形[1], 对 $\forall p\in M$ 任意由 p 出发的正规测地线 $\gamma:[0,+\infty)\to M$, 令 $B_\gamma=\bigcup B(\gamma(t),t)$, $H_\gamma=(B_\gamma)'=M-B_\gamma$, 则有

(i) H_γ 是 M 的全凸子集, 即对 $\forall x,y\in H_\gamma$, γ_{xy} 是连接之测地线, 则 $\gamma_{xy}\subset H_\gamma$. 固定 $p\in M$, γ 是任一由出发的正规测地射线, 记 $\gamma_t(s)=\gamma(s+t):[0,+\infty)\to M$, 及 $C_t=\bigcap_\gamma(B_{\gamma_t})'$, 则有

(ii) 对 $\forall\geqslant 0$, C_t 是紧致全凸的而且满足

(a) $t_2\geqslant t_1$ 隐含 $C_{t_2}\supset C_{t_1}$, 且

$$C_{t_1}=\{q\in C_{t_2}:\mathrm{dist}(q,\partial C_{t_2})\geqslant t_2-t_1\},$$

$$\partial C_{t_1}=\{q\in C_{t_2}:\mathrm{dist}(q,\partial C_{t_2})=t_2-t_1\},$$

(b) $\bigcup_{t\geqslant 0}C_t=M$, (c) $p\in\partial C_0$.

对 M 中任一全凸的闭子集 C, $\partial C\neq\phi$, 令

$$C^a=\{p\in C:\mathrm{dist}(p,\partial C)\geqslant a\},$$

$$C^{\max}=\bigcap_{C^a\neq\phi}C^a,$$

(iii) 对 $\forall a$, C^a 是全凸的且 $\dim C^{\max}<\dim C$.

(iv) 由(i), (ii), (iii) 知在 M 中存在一紧致全凸全测地的子流形 S, 称 S 为 M 之核心. 其次引进 Perelman G 证明著名的核心猜想时实际上是证明了以下的

引理 1[2] 设 S 为 M 之核心, $SN(S)$ 是单位法丛, 则存在距离不增之收缩 $P:M\to S$ 满足

(a) $\forall x\in S, v\in SN(S)$;

(b) 任意正规测地线 $\gamma\subset S$, 任意向量场 $V\in\Gamma(SN(s))$, V 沿 γ 为平行, 则 $\gamma_t(u)=\exp_{\gamma(u)}tv$ 是测地线, 所有的 $\gamma_t(u)$ 组成一平坦的全测地带 $(t\geqslant 0)$, 并且若 $\gamma(s)\big|_{u_0}^{u_1}$ 是最短, 则 $\gamma_t(s)\big|_{u_0}^{u_1}$ 亦最短.

(c) P 是 C^1 阶黎曼淹没.

引理 2[3] 设 M 为完备非紧具非负曲率的黎曼流形, 若 $\gamma:(-\infty,+\infty)\to M$ 是 M 中的完备闭测地线, 则 $\gamma\subset$ 某一核心 S 中.

定义 3 设 M 为完备非紧的黎曼流形, $\gamma:[0,+\infty)\to M$ 为射线, γ 的反向无限延长所得的完备测地线仍记为 γ. 若对任意正数 t, $\gamma_{-t}:[-t,+\infty)\to M$ 都不是射线, 则称 $o=\gamma(0)$ 是 γ 所对应的顶点. 并称之为 M 的一个顶点.

当然, 对一般的完备非紧的黎曼流形, 并非其上任一射线都有相对应的顶点, 这种顶点的存在性与流形的几何拓扑性质有密切关系. 如当流形具有正的曲率时, 每条射线都有对应的顶点, 而对于 R^3 中的柱面 $x^2+y^2=1$, 任一射线都没有相对应的顶点.

引理 3 若 $o\in M$ 是射线 γ 所对应的顶点, 由开始构造核心 S, 则 $o\in S$.

证明 由 o 开始构造核心 S, 则 $o\in\partial C_0$. 若 $S\neq\partial C_0$, 则 $S\subset\mathrm{int}C_0\subset\mathrm{int}C_t$. 且由以上的构造说明知, 对 $\forall x\in S$, $\forall t>0$ 有

$$d(x,\partial C_0)=d(S,\partial C_0)=a,$$

$$d(x,\partial C_t)=d(S,\partial C_t)=a+t \quad (1)$$

设 $p\in S$ 使得 $d(o,p)=d(o,S)$, 记相应的实现其距离的最短测地线为 σ. 由式(1) 有

$$d(o,\partial C_t)=a+t=L(\sigma)+L(\gamma\big|_{[0,t]}).$$

这说明 γ 与 σ 只能同属于同一条完备的测地线, 且

收稿日期: 2003-09-10
作者简介: 詹华税(1966—), 男, 在职博士研究生. 现在集美大学任教.

由 o 到 $\gamma(t)$ 的距离为最短. 由 t 之任意性, 知 γ 与 σ 构成一射线, 这便与 p 为顶点矛盾. 类似可证引理4.

引理4　设 M 为完备非紧具非负曲率的黎曼流形, 若 M 中不含测地直线, 则核心 S 完全由顶点所构成.

命题5　设 $M = R^k \times N$, N 是具非负曲率紧致流形, $k \geqslant 1$, 则 M 的核心不惟一.

证　若 $\mathrm{diam}N = 0$, 则结论显然. 若 N 非退化, 那么熟知 N 上有完备的闭测地线 $\gamma_N: (-\infty, +\infty) \to N$, 并无妨设 $\mathrm{dia}S = d$, 其中 S 为 M 之核心. 由文献[4] 知: 对 $\forall x \in R^k$, (x, γ_N) 是 M 中的完备闭测地线. 由引理2 知 $(x, \gamma_N) \subset S_i$, $i = 1, 2$, S_i 是 M 的核心. 若 $|x_2 - x_1| > d$, 则 $d((x_1, N), (x_2, N)) = |x_1 - x_2| > d$, 所以 $S_1 \neq S_2$, 即 M 的核心不惟一.

引理6[5]　设 M 为完备非紧具非负曲率的黎曼流形, S 是 M 的核心. M 上仅有一个 B- 函数的充要条件是对 $\forall p \in M \setminus S$, 由 p 出发的射线是惟一的.

熟知对完备非紧具非负曲率的黎曼流形 M, 核心一般都是不惟一的, 但不同的核心之间互相等距.

引理7[5]　设 M 为完备非紧具非负曲率的黎曼流形, 若 M 上仅有一个 B- 函数, 则该核心是 M 的极点. 特地 M 与 R^n 微分同胚.

这里 M 上仅有一个 B- 函数的含义[4] 是对任意 M 上的两条射线 γ, σ, 存在常数 $c(\gamma, \sigma)$ 使得

$$B_\gamma = B_\sigma(x) + c(\gamma, \sigma), \qquad \forall x \in M.$$

定理8　设 M 为完备非紧具非负曲率的黎曼流形, 若 M 的核心是惟一的, 则该核心是 M 的极点. 特地 M 与 R^n 微分同胚.

证　用反证法. 记惟一的核心为 S, 若设定理的结论不成立, 则由引理7 知道 M 上不止具有一个 B- 函数. 由引理6 知存在 $\forall p \in M \setminus S$, 由 p 出发的射线至少有两条 γ_1, γ_2. 回顾顶点之定义知 γ_1, γ_2 有相应的顶点 v_1, v_2, (否则 γ_1 便可反向无限延长为测地直线, 反复应用 Toponogov 分裂定理有 $M = R^k \times N$, 由知 M 的核心不惟一), 若 γ_i 延长至 v_i 后, 记为 γ_i, $i = 1, 2$. 由顶点之定义知 γ_1 与 γ_2 都是由 $v = v_i$ 出发的射线, 由文献[2] 知道又由引理4 知 $v_1 \in S$, $v_2 \in S$, 若 $v_1 \neq v_2$, 即 $\mathrm{dist}(v_1, v_2) > 0$, 这便与 $P: M \to S$ 是距离不增之收缩矛盾.

若 γ_1 延长至 $\gamma_i = \gamma_1 = \gamma_2$ 后, 记为 γ_i, 由顶点之定义知 γ_1 与 γ_2 都是由 $v = v_i$ 出发的射线. 由射线之定义知 $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{v\}$, 这便与 $p \in \gamma_1 \cap \gamma_2$ 矛盾. 定理证毕.

结合引理6 又有

推论　设 M 为完备非紧具非负曲率的黎曼流形, 若 M 的核心惟一, 则 M 上仅有一个 B- 函数.

对于一般的黎曼流形 M, 若同样假设其上不存在测地直线, 那么每一射线都有其对应的顶点. 令 $\sum = \{M$ 中所有顶点$\}$, 那么 $\sum$ 有什么样的性质? 这是一个很有意思的问题.

参考文献:

[1] Cheeger J, Ebin D. Comparison Theorems in Raminnian Geometry[M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975.

[2] Perelmann G. Proof of the soul conjecture of Cheeger-Gromoll [J]. J. Diff. Geom., 1994, 40: 209—212.

[3] 詹华税. 关于H-WU 问题[J]. 数学进展, 2000, 29: 362—369.

[4] 伍鸿熙, 陈维桓. 黎曼几何选讲[M]. 北京: 北京大学出版社, 1993. 70—73.

[5] 詹华税. 有一个 B-函数的完备黎曼流形[J]. 数学研究, 2000, 33(2): 214—217.

[6] 詹华税. 有一个 B-函数的完备非紧具非负曲率流形[J]. 集美大学学报, 2000, 5(3): 12—17.

The Properties of the Soul in a Complete Riemannian Manifold with Nonnegative Curvature

ZHAN Hua-shui

(School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: The paper discusses the structure of the soul in a complete noncompact Riemannian manifold M with nonnegative curvature, and proves that if the soul of the manifold is unique, then the soul actually degenerates to a pole.

Key words: complete noncompact Riemannian manifold; nonnegative curvature; soul; pole