文章编号:1000 - 2243(2004)04 - 0445 - 03

二维Poisson方程谱元法有限元预条件分析

黄文彬[1],许传炬[2]

(1. 福州大学数学与计算机科学学院,福建 福州 350002;2. 厦门大学数学系,福建 厦门 361005)

摘要:考虑二维Poisson方程的谱元法离散系统的预条件求解问题,利用张量积的性质,分析基于GLL×GLL节点上的双线性有限元刚性矩阵s_h作为谱元离散系统$A_hU = F_h$的预条件,证明了$(S_hU, U)_{l_2}$和$(A_hU, U)_{l_2}$的等价性.

关键词:Poisson方程;谱元法;有限元;预条件

中图分类号:O241.82;O175.2 **文献标识码**:A

Analysis for two - dimensional finite element preconditioned spectral element method of the Poisson equation

HUANG Wen - bin[1], XU Chuan - ju[2]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou, Fujian 350002, China; 2. Department of Mathematics, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, China)

Abstract: This paper analyze the spectrum of two - dimensional preconditional spectral element approximation to Poisson proplem. The analysis is based on the algebraic properties of the stiffness matrix (s_h) of the bilinear finite element method associated to the global GLL ×GLL nodes, which is used as the preconditioner of the spectral element system $A_hU = F_h$. We theoretically show the equivalence betweeen $(S_hU, U)_{l_2}$ and $(A_hU, U)_{l_2}$.

Keywords: Poisson equation; spectral element methods; finite element; preconditioning

1 定义和记号

记$\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$,考虑Poisson问题:

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) & ((x, y) \in \Omega) \\ u(x, y) = 0 & ((x, y) \in \partial\Omega) \end{cases} \tag{1}$$

式中:$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$,$\Gamma_1 = \{(x, -1), -1 \le x \le 1\}$,$\Gamma_2 = \{(1, y), -1 \le y \le 1\}$,$\Gamma_3 = \{(x, 1), -1 \le x \le 1\}$,$\Gamma_4 = \{(-1, y), -1 \le y \le 1\}$.

设U,V是向量,定义U,V的l_2内积:$(U, V)_{l_2} = \sum u_k v_k$.

L_N是N阶Legendre多项式,ξ_i和ρ_i分别表示GLL点及其对应的权系数. 参数h代表一组整数(N, K),$K = K_1 \times K_2$. Maday等在文献[2]中提出将计算区域Ω分解成K个小的矩形区间,这里K_1,K_2分别表示x方向和y方向的区域划分个数.

$$\Omega = \cup_{k=1}^{K} \Omega_k$$

这里,$\Omega_k = [a_s, a_{s+1}] \times [b_t, b_{t+1}]$,$k = t \cdot K_1 + s$;$s = 1, \cdots, K_1$;$t = 0, \cdots, (K_2 - 1)$.

收稿日期:2004 - 03 - 30
作者简介:黄文彬(1976 -),女,硕士,助教.

分片多项式空间 $P_{N,K}$ 和谱元离散空间 X_h 采用文献[1]中的定义. 记 l_1^k, l_2^k 为第 k 个区间 x 和 y 方向的长度, 定义一个仿射变换使得 $F^k(r_1, r_2):(r_1, r_2) \to (x, y) \in \Omega_k$. 那么

$$\xi_i^k = a_s + l_1^k(\xi_i + 1)/2, \xi_j^k = b_t + l_2^k(\xi_j + 1)/2; \rho_i^k = \rho_i l_1^k/2, \rho_j^k = \rho_j l_2^k/2$$

定义 $C^0(\Omega, K)$ 及其离散内积 $(\cdot, \cdot)_{h,\alpha}$ 和离散范数 $\|\cdot\|_{h,\alpha}$:

$$C^0(\Omega, K) = \{\phi \in L^2(\Omega), \phi|_{\Omega_k} \in C^0(\Omega_k), k = 1, \cdots, K\}$$

$$\forall \phi, \psi \in C^0(\Omega, K), (\phi, \psi)_{h,\alpha} = \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\phi(\xi_i^k, \xi_j^k)\psi(\xi_i^k, \xi_j^k)\rho_i^k\rho_j^k$$

$$\|\phi\|_{h,\alpha} = (\phi, \phi)_{h,\alpha}^{1/2}$$

设 V_h 是定义在 Ω 上的基于剖分 (ξ_i^k, ξ_j^k) 的分段双线性函数空间, 且 V_h 中的函数在边界点的值恒等于零, 对任意的 $u(x, y) \in V_h$, 定义 $I_h u \in X_h$, 则

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}u_{ij}^k\psi_i^k(x)\psi_j^k(y)$$

$$I_h u(x, y) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}u_{ij}^k\phi_i^k(x)\phi_j^k(y)$$

这里 $u_{ij}^k = u(\xi_i^k, \xi_j^k)$; $\psi_i^k(x)$ 和 $\phi_i^k(x)$ 分别是文献[4]定义的"帽"函数和Lagrange基函数. 当 $\Omega_k \cap \Gamma_3 \neq \varnothing$, $u_{iN}^k = 0$; 当 $\Omega_k \cap \Gamma_2 \neq \varnothing$, $u_{Nj}^k = 0$.

谱元法在有限维空间 $X_h(\Omega)$ 中通过取Lagrange基函数找逼近解, 得到一个关于数值解 $u_h(x, y)$ 全局节点值向量 U 满足的线性方程组[2]:

$$A_h U = F_h \tag{2}$$

但是系数矩阵 A_h 不是稀疏阵且条件数一般很大, 若直接对式(2)求解代价很大. 现在通过有限元方法得到的刚性矩阵 S_h 做预条件:

$$S_h^{-1}A_h U = S_h^{-1}F_h \tag{3}$$

若 $S_h^{-1}A_h$ 的条件数得到改善, 便可考虑用适当的迭代法求得式(3)的解.

2 预条件谱分析

引理1 对任意 $f_h(x, y) \in X_h$, 都有下式成立:

$$\|f_h(x, y)\|_0^2 \infty (f_h, f_h)_{h,\alpha}$$

证明 由定义可知:

$$(f_h, f_h)_{h,\alpha} = \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=0}^{N}\rho_i^k\left\{\frac{1}{2}l_2^k\sum_{j=0}^{N}f_h^2(\xi_i^k, \xi_j^k)\rho_j\right\}$$

根据文献[1]中等价性不等式(2-8)可得到:

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=0}^{N}\rho_i^k\int_{b_t}^{b_{t+1}}f_h^2(\xi_i^k, y)\mathrm{d}y \le (f_h, f_h)_{h,\alpha} \le 3\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=0}^{N}\rho_i^k\int_{b_t}^{b_{t+1}}f_h^2(\xi_i^k, y)\mathrm{d}y$$

由定理1) 1.21.2和文献[1]中等价性不等式(2)-式(8)证得:

$$\sum_{k=1}^{K}\int_{a_s}^{a_{s+1}}\int_{b_t}^{b_{t+1}}f_h^2(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le (f_h, f_h)_{h,\alpha} \le 9\sum_{k=1}^{K}\int_{a_s}^{a_{s+1}}\int_{b_t}^{b_{t+1}}f_h^2(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

引理2 对任意的 $f_h(x, y) \in X_h$, 均有:

$$(\nabla f_h, \nabla f_h)_{h,\alpha} \infty \|f_h\|_1^2$$

证明 略.

1) Szego G. Orthogonal Polynomial. Amer Math Soc, 1995.

现在考虑问题(1)的谱元离散:求 $u_h \in X_h$,使得:

$$(\nabla u_h , \nabla v_h)_{h,\Omega} = (f , v_h)_{h,\Omega} \qquad (\forall v_h \in X_h) \tag{4}$$

在空间 X_h 中取Lagrange基函数 $\Phi_{ij}^k(x , y) = \phi_i^k(x)\phi_j^k(y)$,将式(4)中的解 u_h 用基函数 $\Phi_{ij}^k(x , y)$ 线性表示,并让 v_h 取遍所有的基函数就得到二维的Poisson问题的谱元离散系统:

$$A_h U = F_h \tag{5}$$

同样,在 v_h 有限元空间中取遍 $\Psi_{ij}^k(x , y) = \psi_i^k(x)\psi_j^k(y)$,可以得到一个有限元刚性矩阵 S_h.

现在考虑2个常微分运算,假设 B^x, B^y 是2个常微分算子:

$$B^x u = - u'', u(\pm 1) = 0 \qquad (-1 \leq x \leq 1) \tag{6}$$

$$B^y u = - u'', u(\pm 1) = 0 \qquad (-1 \leq y \leq 1) \tag{7}$$

定理1　在 $V_{h,x}$ 和 $V_{h,y}$ 有限元空间,对 B^x, B^y 分别进行有限元离散得到的刚性矩阵分别记为 $S_{h,x} S_{h,y}$,设 $M_{h,x} M_{h,y}$ 是它们相应的质量矩阵,那么有:

$$S_h = M_{h,y} \otimes S_{h,x} + S_{h,y} \otimes M_{h,x}$$

证明　由文献[4]一维的推理中知道:

$$S_{h,x} = \mathrm{diag}\left\{ S_{h,x}^1 , \cdots, S_{h,x}^{K_1} \right\} , (S_{h,x}^s)_{ij} = (\psi_{i,x}^s(x) , \psi_{j,x}^s(x)) \qquad (1 \leq s \leq K_1)$$

$$S_{h,y} = \mathrm{diag}\left\{ S_{h,y}^1 , \cdots, S_{h,y}^{K_2} \right\} , (S_{h,y}^t)_{ij} = (\psi_{i,y}^t(y) , \psi_{j,y}^t(y)) \qquad (1 \leq t \leq K_2)$$

$$M_{h,x} = \mathrm{diag}\left\{ M_{h,x}^1 , \cdots, M_{h,x}^{K_1} \right\} , (M_{h,x}^s)_{ij} = (\psi_i^s(x) , \psi_j^s(x)) \qquad (1 \leq s \leq K_1)$$

$$M_{h,y} = \mathrm{diag}\left\{ M_{h,y}^1 , \cdots, M_{h,y}^{K_2} \right\} , (M_{h,y}^t)_{ij} = (\psi_i^t(y) , \psi_j^t(y)) \qquad (1 \leq t \leq K_2)$$

从有限元离散过程可以得到:

$$(S_h^k)_{nm,ij} = (\nabla \Psi_{ij}^k(x , y) , \nabla \Psi_{nm}^{\ k}(x , y)) = (M_{h,y}^t)_{jm} \cdot (S_{h,x}^s)_{in} + (S_{h,y}^t)_{jm} \cdot (M_{h,x}^s)_{in}$$

所以

$$S_h = M_{h,y} \otimes S_{h,x} + S_{h,y} \otimes M_{h,x}$$

定理2　在 $X_{h,x}$ 和 $X_{h,y}$ 空间,对 B^x, B^y 分别进行谱元离散,所得到的矩阵分别记为 $A_{h,x}$, $A_{h,y}$,相应的权系数矩阵记为 $W_{h,x}$, $W_{h,y}$,那么,

$$A_h = W_{h,y} \otimes A_{h,x} + A_{h,y} \otimes W_{h,x}$$

证明　利用定理1的证明技巧,同理可证明结论.

引理3　设 $f(x , y) \in X_h$, $u(x , y) \in V_h$,

$$f(x , y) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} f_{ij}^k \Phi_{ij}^k(x , y) , \quad u(x , y) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} u_{ij}^k \Psi_{ij}^k(x , y)$$

当 $\Omega_k \cap \Gamma_3 \neq \varnothing$, $f_{iN}^{\ k} = 0$;当 $\Omega_k \cap \Gamma_2 \neq \varnothing$, $f_{Nj}^{\ k} = 0$. 设 $F = (F^1 , \cdots, F^K)^{\mathrm{T}}$, $U = (U^1 , \cdots, U^K)^{\mathrm{T}}$,其中 $F^k = (f_1^k , \cdots, f_{N\times N}^k)^{\mathrm{T}}$, $U^k = (u_1^k , \cdots, u_{N\times N}^k)^{\mathrm{T}}$, $1 \leq k \leq K$. 那么,

$$(A_h F , F)_{l_2} = (\nabla f , \nabla f)_{h,\Omega} \infty \| f \|_1^2 , (S_h U , U)_{l_2} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \infty \| u \|_1^2$$

从引理3容易证得以下定理.

定理3　对任意的向量 $U = (U^1 , \cdots, U^K)^{\mathrm{T}}$,设 $W_h = W_{h,y} \otimes W_{h,x}$, $M_h = M_{h,y} \otimes M_{h,x}$,则有:

$$(W_h U , U)_{l_2} \infty (M_h U , U)_{l_2}$$

定理4　对任意的 $u \in V_h$,有:

$$\| u \|_1 \infty \| I_h u \|_1 , \quad \| u \|_0 \infty \| I_h u \|_0$$

由文献[3]的引理5.4容易得到下面的引理.

引理4　对任意的向量 $U = (U^1 , \cdots, U^K)^{\mathrm{T}}$ 都有:

$$((W_{h,y} \otimes A_{h,x}) U , U)_{l_2} \infty ((M_{h,y} \otimes S_{h,x}) U , U)_{l_2}$$

$$((A_{h,y} \otimes W_{h,x}) U , U)_{l_2} \infty ((S_{h,y} \otimes M_{h,x}) U , U)_{l_2}$$

(转第465页)

况增加相应的监控服务器.

2.4　监控系统特色

原有的客服系统主要是通过维护人员定时查看数据日志的方式来监控系统, 往往故障发生后才发现问题, 并且, 若原有的监控元未自带日志, 不能被监控. 本研究的监控系统可监控所有设备, 实时采集运行数据、实时做分析, 可在故障发生前监控到系统隐患, 并以多种方式预警, 及时通知相关人员处理.

3　结语

监控方法已成功应用于福建联通的客户服务系统中, 对原有系统的各子模块、子系统的软硬件都能做到监控, 提取的预警数据准确, 多次成功地把故障排除在萌芽阶段. 但在成本控制、技术支持和管理模式等方面还有许多工作需要做.

参考文献:

[1] 张小英, 张灯英. 电信级呼叫中心的研究与发展[J]. 通信世界, 2000(5): 32.

[2] David D Bezar. 电话综合业务技术指南[M]. 沈 晓, 等译. 北京: 机械工业出版社, 1998.

[3] Walters R. 计算机电话集成技术[M]. 2nd ed. 宋俊德, 段云峰译. 北京: 人民邮电出版社, 2000.

(接第 447 页)

因此, 从引理 4 即可得到下面的定理:

定理 5　对每个 $U = (U^1, \cdots, U^K)^{\mathrm{T}}$, 都有:

$$(A_h U, U)_{l_2} \backsim (S_h U, U)_{l_2}$$

定理 5 的等价性结果也可用 $S_h^{-1} A_h$ 的特征值分布来刻划. 若 $\lambda_j^k (1 \le j \le N \times N, 1 \le k \le K)$ 是矩阵 $S_h^{-1} A_h$ 的特征值, 那么存在 2 个与 h 无关的正常数 $0 < c_0 \le c_1$, 使得 $0 < c_0 \le \lambda_j^k \le c_1$.

参考文献:

[1] Maday Y, Patera A T. Spectral element methods for the incompressible Navier - Stokes Equations[M]. New York: ASME, 1988. 71 - 143.

[2] Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A. Spectral methods in fluid dynamics[M]. New York: Springer Verlag, 1988.

[3] Paters S V, Rothman E E. Preconditioning legendre spectral collocation approximations to elliptic problems[J]. SIAM J Numer Anal, 1995(32): 233 - 385.

[4] 黄文彬, 许传炬. Poisson 方程谱元法的一个有限元预条件分析[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2003(4): 421 - 424.