烟台师范学院学报(自然科学版)
Yantai Normal University Journal(Natural Science) 2004,20(2):81—85

关于 Post-Gamma 算子的点态逼近估计

王 涛

(厦门大学数学系,福建 厦门 361005)

摘要:综合利用概率论中的中心极限定理的一种渐近展开形式和 Bojanic-Cheng 方法,研究了 Post-Gamma 算子对局部有界函数的点态逼近估计,得到精确的逼近阶,并进一步证明了此估计在连续点处是渐进最优的.

关键词:Post-Gamma 算子;局部有界函数;中心极限定理;渐近最优

中图分类号:O174.41 **文献标识码**:A **文章编号**:1004-4930(2004)02-0081-05

设 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一列独立同分布的随机变量,ξ_i 的密度函数为 $p_x(t)=\begin{cases}\frac{1}{x}e^{-\frac{t}{x}}, t>0,\\ 0, t\leqslant 0.\end{cases}$ 令 $\eta_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$,记随机变量 η_n 的概率分布函数为 $F_{\eta_n}(t)$,考虑如下概率型算子

$$G_n(f(t),x)=\int_0^{+\infty}f(\frac{t}{n})\mathrm{d}F_{\eta_n}(t)=\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty}f(\frac{t}{n})t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}\mathrm{d}t,$$

$G_n(f(t),x)$ 称为 Post-Gamma 算子 . 概率论的方法和技术已在算子逼近估计的研究中有许多应用[1—4],本文将采用概率论中心极限定理的渐近展开形式来研究算子 $G_n(f,x)$ 的点态逼近估计,得到精确的逼近阶,并改进和推广了文[5] 对 Gamma 算子的估计结果 . 考虑如下的局部有界函数类 I_{LocB} 和局部有界变差函数类 I_{LocBV},其中 $I_{LocB}=\{f\mid f$ 在 $[0,+\infty)$ 的每一有限子区间为有界,$f(t)=O(e^t),t\to+\infty\}$;$I_{LocBV}=\{f\mid f$ 在 $[0,+\infty)$ 的每一有限子区间为有界变差,$f(t)=O(e^t),t\to+\infty\}$. 为了使函数类包括有界变差函数的情况,我们考虑如下的估计量. 设 f 为定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数 $\Omega(x,f,\delta)=\sup\limits_{t\in[x-\delta,x+\delta]}|f(t)-f(x)|$,其中 x 为固定点,$0\leqslant\delta\leqslant x$,其性质有

i) $\Omega(x,f,\delta)$ 关于 δ 是单调非减的;

ii) 当 $f(t)$ 在 x 点连续时下式成立,$\lim\limits_{\delta\to0}\Omega(x,f,\delta)=0$;

iii) 如果 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数,$V_a^b(f)$ 表示 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上的全变差,则有 $\Omega(x,f,\delta)\leqslant V_{x-\delta}^{x+\delta}(f)$.

1 主要结果及引理

定理 1 设 $f\in I_{LocB}$,对 $x\in(0,+\infty)$,$f(x+)$ 和 $f(x-)$ 存在,则当 n 充分大时,有如下的估计式

$$\left|G_n(f,x)-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}+\frac{f(x+)-f(x-)}{3\sqrt{2n\pi}}\right|\leqslant\frac{5}{n}\sum_{k=1}^{n}\Omega(x,g_x(t),\frac{x}{\sqrt{k}})+\frac{2Me^{2x}}{\sqrt{2n\pi}}(\frac{2}{e})^n+o(n^{-\frac{1}{2}}),\quad(1)$$

其中,M 是一个正常数,$g_x(t)=\begin{cases}f(t)-f(x+), t>x,\\ 0, t=x,\\ f(t)-f(x-), t<x.\end{cases}$

注 有界变差函数的逼近情况是定理 1 的特例,实际上,若 $f(t)$ 为有界变差函数时,注意到

收稿日期:2003-10-14
作者简介:王涛(1976—),男,在读硕士研究生,主要从事函数论的研究.

$\Omega(x,f,\delta) \leqslant V_{x-\delta}^{x+\delta}(f)$,从定理1可得到.

推论 若 $f \in I_{LocBV}$,当 n 充分大时,有如下估计式,

$$\left| G_n(f,x) - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} + \frac{f(x+)-f(x-)}{3\sqrt{2n\pi}} \right| \leqslant$$

$$\frac{5}{n}\sum_{k=1}^{n} V_{x-x/\sqrt{k}}^{x+x/\sqrt{k}}(g_x) + \frac{2Me^{2x}}{\sqrt{2n\pi}}\left(\frac{2}{e}\right)^n + o(n^{-\frac{1}{2}}),$$

其中,M, g_x 如定理中定义,$V_a^b(f)$ 表示 $f(t)$ 在$[a,b]$上的全变差.

为证明定理1,我们须先证明如下引理.

引理1 对 $\forall x \in (0,+\infty)$,有

$$\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{y} t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt \leqslant \frac{nx^2}{(nx-y)^2}, 0 \leqslant y < nx, \tag{2}$$

$$\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_z^{2nx} t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt \leqslant \frac{nx^2}{(z-nx)^2}, nx < z \leqslant 2nx. \tag{3}$$

证明 当 $\frac{t}{n} \leqslant \frac{y}{n} < x$ 时,有$\frac{x-t/n}{x-y/n} \geqslant 1$,

$$\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{y} t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt \leqslant \frac{1}{\Gamma(n)(x-\frac{y}{n})^2}\int_0^{y}(x-\frac{t}{n})^2(\frac{t}{x})^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}\frac{1}{x}dt,$$

由算子的定义直接计算得,$\forall x \in (0,+\infty)$,$G_n((t-x)^2,x) = \frac{x^2}{n}$,因此

$$\frac{1}{\Gamma(n)(x-\frac{y}{n})^2}\int_0^{y}(x-\frac{t}{n})^2(\frac{t}{x})^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}\frac{1}{x}dt \leqslant \frac{nx^2}{(nx-y)^2}.$$

同理,可证得(3)式成立.

引理2 对 $x \in (0,+\infty)$,n 充分大时,有下式成立.

$$\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{2nx}^{+\infty} e^{\frac{t}{n}}t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt \leqslant \frac{2e^{2x}}{\sqrt{2n\pi}}\left(\frac{2}{e}\right)^n.$$

证明 由Post-Gamma算子的定义可知,

$$\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{2nx}^{+\infty} e^{\frac{t}{n}}t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt = \frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{2x}^{+\infty} e^{u}(nu)^{n-1}e^{-\frac{nu}{x}}n\,du =$$

$$\frac{n^n x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{2x}^{+\infty} u^{n-1}e^{u}e^{-\frac{nu}{x}}du = \frac{n^n}{\Gamma(n)}\int_{2}^{+\infty} v^{n-1}e^{-(n-x)v}dv \leqslant$$

$$\frac{n^n e^{-2(n-x)}}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{2^{n-1}n}{n-x} + \frac{2^{n-2}n(n-1)}{(n-x)^2} + \cdots + \frac{n!}{(n-x)^n}\right),$$

其中上式第1,3个等号分别用变量代换 $\frac{t}{n} = u, \frac{u}{x} = v$,由于上面最后一式中

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n-x} = 1, \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n-1)}{(n-x)^2} = 1, \cdots, \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-[x])}{(n-x)^{[x]+1}} = 1,$$

(其中$[x]$表示不大于 x 的最大整数),因此存在 N,当时 $n > N$ 时,以上各式小于2,

$$\frac{n^n e^{-2(n-x)}}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{2^{n-1}n}{n-x} + \frac{2^{n-2}n(n-1)}{(n-x)^2} + \cdots + \frac{n!}{(n-x)^n}\right) \leqslant$$

$$\frac{n^n e^{-2(n-x)}}{n!}(2^n + 2^{n-1}\cdots + 2) \leqslant \frac{n^n e^{-n}}{n!}2e^{2x}\left(\frac{2}{e}\right)^n.$$

由Stirling公式可知 $\frac{n^n e^{-n}}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}H_n}$,其中 $H_n = e^{\frac{\theta_n}{12n}}, 0 < \theta_n \leqslant 1$,由以上证明可知,对充分大的 n,

$$\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{2nx}^{+\infty} e^{\frac{t}{n}}t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt \leqslant \frac{2e^{2x}}{\sqrt{2n\pi}}\left(\frac{2}{e}\right)^n.$$

引理3 $\forall x \in [0,+\infty), \forall n \in N$ 有, $G_n(|t-x|,x) \geqslant \frac{x}{\sqrt{n\pi}}$.

证明
$$\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty}\left|\frac{t}{n}-x\right|t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt =$$
$$\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{nx}^{+\infty}\left(\frac{t}{n}-x\right)t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt - \frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{nx}\left(\frac{t}{n}-x\right)t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt =$$
$$\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{n}-x\right)t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt - 2\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{nx}\left(\frac{t}{n}-x\right)t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt =$$
$$2x\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{n}u^{n-1}e^{-u}du - \frac{2x}{\Gamma(n+1)}\int_0^{n}u^{n}e^{-u}du = \frac{2x}{\Gamma(n+1)}e^{-n}n^n,$$

由 Stirling 公式可知,对任意的自然数 n
$$\frac{2x}{\Gamma(n+1)}e^{-n}n^n = \frac{2xe^{-n}n^n}{\sqrt{2n\pi}n^ne^{-n}H_n} = \frac{2x}{\sqrt{2n\pi}H_n} \geqslant \frac{x}{\sqrt{n\pi}}.$$

下面的引理4是概率论中心极限定理的一种渐进展开形式,它的证明可参见文[4(P540—542)].

引理4 设 $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一列独立同分布的随机变量列,数学期望 $E(\xi_i)=a_1$,方差 $E(\xi_i-E\xi_i)^2=\sigma^2$, $E(\xi_i-E\xi_i)^3<\infty$,设 $F_n(t)$ 是随机变量 $\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-E\xi_i)/\sqrt{n}\sigma$ 的分布函数,则下式成立,
$$F_n(t)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-u^2/2}du-\frac{E(\xi_i-E\xi_i)^3}{6\sigma^3\sqrt{n}}(1-t^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}=o(n^{-\frac{1}{2}}).$$

引理5 设 $\mathrm{sgn}(t-x)$ 为符号函数,对任意的 $x\in(0,+\infty)$,则下式成立,
$$G_n(\mathrm{sgn}(t-x),x)=-\frac{2}{3\sqrt{2n\pi}}+o(n^{-\frac{1}{2}}).$$

证明 设 $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一列独立同分布的随机变量,其密度函数为 $p(x)=\frac{1}{x}e^{-\frac{t}{x}}(t>0)$,通过计算可知, $E(\xi_i)=x$, $E(\xi_i-E\xi_i)^2=x^2$, $E(\xi_i-E\xi_i)^3=2x^3$.设 F_n 是随机变量 $\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-E\xi_i)/\sqrt{n}\sigma$ 的分布函数,令 $\eta_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$,则 η_n 的概率分布为
$$P(\eta_n\leqslant y)=\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{y}t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt,$$

因此有
$$G_n(\mathrm{sgn}(t-x),x)=-\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{nx}t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt+\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{nx}^{+\infty}t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt =$$
$$1-P(\eta_n\leqslant nx)-P(\eta_n<nx)=1-F_n(0)-F_n(0).$$

由引理4可知, $2F_n(0)-1=\frac{2}{3\sqrt{2n\pi}}+o(n^{-\frac{1}{2}})$,因此有 $G_n(\mathrm{sgn}(t-x),x)=-\frac{2}{3\sqrt{2n\pi}}+o(n^{-\frac{1}{2}})$.

2 定理的证明

由于对任意的有界函数 $f(t)$, $x\in(0,+\infty)$ 对 $f(x-)$, $f(x+)$ 存在, $f(t)$ 可作如下分解, $f(t)=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}+g_x(t)+\frac{f(x+)-f(x-)}{2}\mathrm{sgn}(t-x)+\delta_x(t)\left(f(x)-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\right)$,其中, $\delta_x(t)=\begin{cases}1, t=x,\\0, t\neq x.\end{cases}$ 由积分性质可知, $G_n(\delta_x,x)=0$,由引理4,引理5可知
$$\left|G_n(f,x)-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}+\frac{f(x+)-f(x-)}{3\sqrt{2n\pi}}\right|\leqslant|G_n(g_x,x)|+o(n^{-\frac{1}{2}}).$$

下面估计 $|G_n(g_x,x)|$,对 $G_n(g_x,x)$ 作如下分解,

$$G_n(g_x,x)=\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty}g_x(\frac{t}{n})t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt=R_1(g_x,x)+R_2(g_x,x)+R_3(g_x,x)+R_4(g_x,x),$$

其中,

$$R_1(g_x,x)=\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{n(x-x/\sqrt{n})}g_x(\frac{t}{n})t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt,$$

$$R_2(g_x,x)=\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{n(x-x/\sqrt{n})}^{n(x+x/\sqrt{n})}g_x(\frac{t}{n})t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt,$$

$$R_3(g_x,x)=\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{n(x+x/\sqrt{n})}^{2nx}g_x(\frac{t}{n})t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt,$$

$$R_4(g_x,x)=\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{2nx}^{+\infty}g_x(\frac{t}{n})t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt.$$

由 $g_x(t)$ 的定义及 $\Omega(x,g_x,\delta)$(下文简记为 $\Omega(\delta)$)的性质可知对 $\forall t\in[n(x-\frac{x}{\sqrt{n}}),n(x+\frac{x}{\sqrt{n}})]$ 有

$$\left|g_x(\frac{t}{n})\right|=\left|g_x(\frac{t}{n})-g_x(x)\right|\leqslant\Omega(x,g_x,\frac{x}{\sqrt{n}}),$$

因此有下式成立

$$\left|R_2(g_x,x)\right|\leqslant\Omega(x,g_x,\frac{x}{\sqrt{n}})\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{n(x-\frac{x}{\sqrt{n}})}^{n(x+\frac{x}{\sqrt{n}})}t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Omega(x,g_x,\frac{x}{\sqrt{k}}).\tag{4}$$

令 $K_n(x,t)=\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^t s^{n-1}e^{-\frac{s}{x}}ds$, $y=n(x-\frac{x}{\sqrt{n}})$, $0\leqslant t\leqslant n(x-\frac{x}{\sqrt{n}})$, 因此, $d_tK_n(x,t)=\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt$, 由分部积分法得到

$$\left|R_1(g_x,x)\right|=\left|\int_0^y g_x(\frac{t}{n})d_tK_n(x,t)\right|\leqslant\int_0^y\Omega(x-\frac{t}{n})d_tK_n(x,t)=$$

$$\Omega(x-\frac{y}{n})K_n(x,y)+\int_0^y K_n(x,t)d(-\Omega(x-\frac{t}{n})).$$

由引理 1,2 式可知 $K_n(x,y)\leqslant\frac{nx^2}{(nx-y)^2}$, 因此

$$\left|R_1(g_x,x)\right|\leqslant\Omega(x-\frac{y}{n})\frac{nx^2}{(nx-y)^2}+\int_0^y\frac{nx^2}{(nx-t)^2}d(-\Omega(x-\frac{t}{n})).$$

再次利用分部积分法得到

$$\int_0^y\frac{nx^2}{(nx-t)^2}d(-\Omega(x-\frac{t}{n}))=-\Omega(x-\frac{y}{n})\frac{nx^2}{(nx-y)^2}+\frac{1}{n}\Omega(x)+\int_0^y\Omega(x-\frac{t}{n})\frac{2nx^2}{(nx-t)^3}dt,$$

对上式右边最后项利用变量代换 $\frac{t}{n}=x-\frac{x}{\sqrt{u}}$ 可得到

$$\int_0^y\Omega(x-\frac{t}{n})\frac{2nx^2}{(nx-t)^3}dt=\frac{1}{n}\int_1^n\Omega(\frac{x}{\sqrt{u}})du,$$

$$\left|R_1(g_x,x)\right|\leqslant\frac{1}{n}\Omega(x)+\frac{1}{n}\int_1^n\Omega(\frac{x}{\sqrt{u}})du\leqslant\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\Omega(x,g_x,\frac{x}{\sqrt{k}}),\tag{5}$$

$$\left|R_3(g_x(t),x)\right|\leqslant\frac{1}{n}\Omega(x)+\frac{1}{n}\int_1^n\Omega(\frac{x}{\sqrt{u}})du\leqslant\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\Omega(x,g_x,\frac{x}{\sqrt{k}}).\tag{6}$$

再对 $R_4(g_x,x)$ 进行估计,由于 $g_x(t)=o(e^t)$, $t\to+\infty$,因此存在 $M>0$ 使得

$$\left|R_4(g_x,x)\right|\leqslant\frac{Mx^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{2nx}^{+\infty}e^{\frac{t}{n}}t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt,$$

由引理 2 可知

$$| R_4(g_x,x) | \leqslant \frac{2Me^{2x}}{\sqrt{2n\pi}}\left(\frac{2}{e}\right)^n, n \to +\infty, \tag{7}$$

因此由(4)—(7)式可知(1)式成立,定理1得证.

如果$f(t)$在x点是连续的,当n充分大时,则(1)式可改写为

$$\left| G_n(f,x) - f(x) \right| \leqslant \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}\Omega\left(x, g_x, \frac{x}{\sqrt{k}}\right), \tag{8}$$

取函数$f(t) = | t - x |, t \geqslant 0$,由于$\Omega\left(x,f,\frac{x}{\sqrt{k}}\right) \leqslant \frac{2x}{\sqrt{k}}$,由(8)式可知

$$\left| G_n(f,x) - f(x) \right| \leqslant \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2x}{\sqrt{k}} \leqslant \frac{12x}{\sqrt{n}},$$

由引理3可知$\left| G_n(f,x) - f(x) \right| \geqslant \frac{x}{\sqrt{n\pi}}$,因此有$\frac{x}{\sqrt{n\pi}} \leqslant \left| G_n(f,x) - f(x) \right| \leqslant \frac{12x}{\sqrt{n}}$,即知(8)式估计在渐近意义下达到最优.

参考文献:

[1] 王坚勇,陈文忠.关于若干概率型算子的逼近性质[J].厦门大学学报(自然科学版),1997,36(6):819—824.

[2] 陈文忠.算子逼近论[M].厦门:厦门大学出版社,1989.171—175.

[3] Zeng X M, Zhao J N. Pointwise approximation by Meyer-Konig and Zeller Operators[J]. Annales Polonici Mathematici LXXIII, 2000,(2):185—196.

[4] Feller W. An introduction to probability theory and its application[M]. New York: Wiley, 1971.540—542.

[5] Chen W Z, Guo S S. On the rate of covergence of the Gamma operators for functions of bounded variation[J]. Approximation Theory and its Application, 1989, 1(5):85—96.

[6] Bojanic R, Vuillemier M. On the rate of covergences of Fourier-Legendre series of functions bounded variation[J]. J Approx Theory, 1981,(31):67—79.

[7] Fuhua cheng. On the rate of convergence of the Szasz-Mirakyan operator for functions of bounded variation[J]. J Approx Theory 1984,(40):226—241.

Pointwise approximation of Post-Gamma operators

WANG　Tao

(Department of Mathematics, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: The rates of convergence of Post-Gamma operators for locally bounded functions is studied by means of probabilistic methods and Bojanic-cheng's methods combining with analysis technigue, and it is proved that the estimation is asymptotically optimal for continuous points.

Key words: Post-Gamma operators; locally bounded functions; central limit theorem; asymptotically optimal

(责任编辑　王美岚)