第 43 卷 第 1 期
2004 年 1 月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol. 43 No. 1
Jan. 2004

文章编号:0438-0479(2004)01-0021-05

分数阶常微分方程初值问题的高阶近似

林　然,刘发旺
(厦门大学数学系,福建 厦门 361005)

摘要: 对于整数阶常微分方程的数值解法,如欧拉法、线性多步法等都已有较完善的理论. 而对于分数阶微分方程数值方法和误差估计的理论研究相对较少. 在这篇文章中,我们考虑最简单的分数阶常微分方程,引进了分数阶的线性多步法,导出了分数阶常微分方程初值问题的高阶近似,证明了其方法的相容性和收敛性,并且给出了稳定性分析. 最后给出了一些数值例子,证实了这个分数阶线性多步法是解分数阶常微分方程的一个有效方法.

关键词: 分数阶常微分方程; 分数阶的线性多步法; 相容性; 收敛性; 稳定性.
中图分类号: O 241.82　　**文献标识码**:A

近十几年来,分数阶的微分方程在科学的不同领域已得到广泛的应用,例如,Abel 积分方程,粘弹性力学,地下水模拟,财经数学,电容器理论,通用电压分流器,生物系统的电传导系数,神经元的分数阶模型,数据拟合等等[1~5]. 因此发展数值方法求解分数阶微分方程是十分有意义的.

1　预备知识

分数阶微分方程是一门崭新的课题. 为了便于读者阅读,在这一节中我们给出了这篇文章中牵涉到的一些相关知识,有兴趣的读者可以阅读有关的文献.

本文考虑最简单的分数阶常微分方程

$$
\begin{aligned}
&{}_0D_t^{\alpha} y(t) = f(t), (t > 0), 0 \le n-1 < \alpha < n \\
&y^{(i)}(0) = 0, \ i = 0, 1, \cdots, n-1
\end{aligned} \tag{1}
$$

定义 1 (Riemann-Liouville 分数阶导数的定义)[5]

$$
{}_a D_t^{\alpha} y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\dfrac{d}{dt}\right)^n \displaystyle\int \dfrac{y(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \\ \qquad 0 \le n-1 < \alpha < n \\ \dfrac{d^n y}{dt^n}, \alpha = n \in N \end{cases} \tag{2}
$$

本文中取 $a = 0$, $a \ne 0$ 的情况可做类似推广.

定义 2 (Grünwald-Letnikov 定义)[5]

$$
{}_0D_t^{\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-\alpha} \Delta_h^{\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[t/h]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh),
$$
$$
0 \le n-1 < \alpha \le n.
$$

2　分数阶导数的数值近似

首先我们考虑对给定函数求分数阶导数的数值近似. 对任意实数 $\alpha (0 \le n-1 \le \alpha < n)$,当函数 $y(t)$ 在区间 $[0, T]$ 中 0 至 $n-1$ 阶导数连续且 $y^{(n)}(t)$ 在 $[0, T]$ 中可积时, 已经证明了 Riemann-Liouville 定义的分数阶导数和 Grünwald-Letnikov 定义的分数阶导数两者是一致的(参见文献[5]). 这就相当于给出了对分数阶导数的一个近似方法. 因为很自然的, 将 Grünwald-Letnikov 定义中的极限号去掉,就可以得到由有限个点的表示的分数阶导数的近似方法. 这相当于给出了一个 1 阶方法,Lubich 又进一步提出了 2 ~ 6 阶形如下面形式的 α 阶导数的近似方法[6]

$$
{}_0D_t^{\alpha} y(t) \approx {}_0\Omega_t^{\alpha} y(t) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n} \omega_j^{(\alpha)} y(t_{n-j}), nh = t \tag{3}
$$

其中系数$\{\omega_j^{(\alpha)}; j = 0, 1, 2, \cdots\}$是下面相应的生成函数的泰勒展开系数,这些函数分别对应 2 至 6 阶方法系数$\{\omega_j^{(\alpha)}; j = 0, 1, 2, \cdots\}$的生成函数.

$$\omega_2^{(\alpha)}(x) = (3/2 - 2x + x^2/2)^{\alpha}$$
$$\omega_3^{(\alpha)}(x) = (11/6 - 3x + 3x^2/2 - x^3/3)^{\alpha}$$

收稿日期:2003-05-29
基金项目:国家自然科学基金(10271098)资助
作者简介:林然(1978 -),男,硕士研究生.

$\omega_4^{(\alpha)}(x) = (25/12 - 4x + 3x^2 - x^3/3 + x^4/4)^\alpha$

$\omega_5^{(\alpha)}(x) = (137/60 - 5x + 5x^2 - 10x^3/3 + 5x^4/4 - x^5/5)^\alpha$

$\omega_6^{(\alpha)}(x) = (147/60 - 6x + 15x^2/2 - 20x^3/3 + 15x^4/4 - 6x^5/5 + x^6/6)^\alpha$

事实上,由 Grünwald-Letnikov 定义得到的方法就是由 $\omega_1^{(\alpha)}(x) = (1 - x)^\alpha$ 的泰勒展开系数 $\{\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}; j = 0,1,2\cdots\cdots\}$ 得到的近似方法. 另外 $\alpha < 0$ 时,由上述函数展开系数得到的公式(3) 实际上是分数阶积分的近似公式,本文只考虑分数阶导数,但仍有用到 $\alpha < 0$ 时生成函数展开系数的性质,这在引理 2 中给出.

系数 $\{\omega_j^{(\alpha)}; j = 0,1,2\cdots\cdots\}$ 的计算可借助于如下复函数泰勒展开系数公式求得(以 2 阶方法的生成函数为例),

$$\omega_j^{(\alpha)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega_2^{(\alpha)}(e^{-i\phi}) e^{ij\phi} d\phi$$ (i 为虚数单位);

$j = 0,1,2\cdots\cdots$

实际上,如果仅用式(3) 来近似,在文献[6] 中 Lubich(1986) 已证明了式(3) 对函数 $y(t) = t^{\beta-1}$ 的误差:

$${}_0D_t^\alpha y(t) - \Omega_t^\alpha y(t) = O(h^\beta) + O(h^p),$$

(其中 $\beta \neq 0, -1, -2, \cdots$),

我们可以发现对于固定的 β,即使 p 提高,误差阶也仍只有 $O(h^\beta)$. 所以,为了给出更高阶的格式,利用 Lubich 提出的技巧[6],改用下式来近似分数阶导数:

$${}_0D_t^\alpha y(t) \approx {}_0D_t^\alpha y(t) = h^{-\alpha}\sum_{j=0}^{n}\omega_j^{(\alpha)} y(t_{n-j}) + h^{-\alpha}\sum_{j=0}^{s} w_{nj} y(t_j), \quad nh = t \tag{4}$$

其思想就是加上一定的修正项使得能去掉 $O(h^\beta)$ 这一项,这样,总的误差阶就只有 $O(h^p)$ 了.

现在来说明式(4) 中的修正项如何得到. 下述内容的详细论述和严格证明可以参阅文献[6],这里只给出最终结果. 式(4) 中的 s 由 $s + \beta - 1 \leq p < s + \beta$ 确定,其中 p 为方法的阶数,而 β 是要使得 $y(x)x^{1-\beta}$ 充分可微,假定 $y(x)$ 充分可微,故可令 $\beta = 1$,所以由上述不等式就可以得到 $s = p$. 就是说在式(3) 基础上加上 s 个点的修正项. 而在解微分方程时,这就相当于线性多步法的 s 个初始值. s 个初始值的系数 w_{nj} 由下列线性方程组求得:

$$\sum_{j=0}^{s} w_{nj} j^{q+\beta-1} = \frac{\Gamma(q+\beta)}{\Gamma(-\alpha+q+\beta)} n^{q-\alpha+\beta-1} - \sum_{j=0}^{n}\omega_{n-j}^{(\alpha)} j^{q+\beta-1} \quad (q = 0, \cdots\cdots, s-1).$$

3 解分数阶常微分方程的数值方法

我们把上节中分数阶导数的近似方法应用于下面最基本的分数阶常微分方程:

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha y(t) = f(t), (t > 0), 0 \leq n-1 < \alpha < n \\ y^{(i)}(0) = 0, \ i = 0,1,\cdots, n-1 \end{cases} \tag{5}$$

利用第 2 节提出的近似方法得到

$$h^{-\alpha}\sum_{j=0}^{n}\omega_j^{(\alpha)} y_{n-j} + h^{-\alpha}\sum_{j=1}^{s} w_{nj} y_j = f_n (n = 1,2,3\cdots\cdots), \ y_0 = 0.$$

我们可以显式的求出分数阶微分方程的 p 阶近似:

$$y_n = \frac{1}{\omega_0^{(\alpha)}}\left(f(t_n) h^\alpha - \sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^{(\alpha)} y_{n-j} - \sum_{j=1}^{s} w_{nj} y_j\right), \quad y_0 = 0. \tag{6}$$

其中,$y_0, y_1, \cdots, y_s$ 为分数阶线性多步法的初始点. 由第 2 节中的论述,当用 p 阶方法近似时,有 $s = p$.

4 分数阶的线性多步法的误差估计

现在来讨论这一方法的误差估计. 先引入两个引理.

引理 1 设 $a_0 \neq 0$, $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots\cdots) = 1$,则

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = (-1)^n a_0^{n+1} C_n.$$

证明参见文献[7].

引理 2 对于式(4),$\{\omega_i^{(\alpha)}; i = 0,1,2\cdots\cdots\}$ 和 $\{\{w_{ni}; n = 0,1,2\cdots\cdots\}; i = 0,1,\cdots\cdots, s-1\}$,如上所述,且 $y(x)x^{1-\beta}$ 在 $[a,b]$ 上充分可微,则 $\omega_i^{(\alpha)} = O(i^{-\alpha-1})$, $w_{ni} = O(n^{-\alpha-1})$ (注: 对任意的 $\alpha < 0$,这一结论仍成立) 且对任意的 $t \in [a,b]$

$$h^{-\alpha}\sum_{j=0}^{n}\omega_j^{(\alpha)} y(t_{n-j}) + h^{-\alpha}\sum_{j=1}^{s} w_{nj} y(t_j) - {}_0D_t^\alpha y(t) = O(h^p), \ nh = t$$

证明参见文献[6], p. 707, Th. 4.

首先考虑线性多步法的局部截断误差(相容性). 为方便叙述,以下证明均取 $p = 2$ 时的分数阶线性多步法. 即公式(4) 中的 $\{\omega_i^{(\alpha)}; i = 0,1,2\cdots\cdots\}$

由生成函数 $\omega_2^{(\alpha)}(x)$ 的展开系数得到,对于 p 为 3 到 6 的情况则完全类似.

与通常的常微分方程的局部截断误差类似,分数阶线性多步法的局部截断误差即由精确的 $y(t_0)$, ……, $y(t_{n-1})$ 求得的 $\tilde{y}_n$ 与 $y(t_n)$ 之间的误差.

定理1　对于分数阶微分方程(5),由分数阶的线性多步法(6)($p=2$)求得的 $\tilde{y}_n$ 的局部截断误差为 $O(h^{2+\alpha})$.

证　当 $n>2$ 时,

$$h^{-\alpha}\omega_0^{(\alpha)}\tilde{y}_n + h^{-\alpha}\sum_{j=1}^{n}\omega_j^{(\alpha)}y(t_{n-j}) + h^{-\alpha}\sum_{j=1}^{2}w_{nj}y(t_j) = f_n,$$

$$h^{-\alpha}\omega_0^{(\alpha)}\tilde{y}_n - h^{-\alpha}\omega_0^{(\alpha)}y(t_n) + h^{-\alpha}\sum_{j=0}^{n}\omega_j^{(\alpha)}y(t_{n-j}) + h^{-\alpha}\sum_{j=1}^{2}w_{nj}y(t_j) = f_n,$$

$$h^{-\alpha}\omega_0^{(\alpha)}(\tilde{y}_n - y(t_n)) + {}_0D_t^{\alpha}y(t) + O(h^2) = f_n,$$

$$(h^{-\alpha}\omega_0^{(\alpha)})(\tilde{y}_n - y(t_n)) = O(h^2),$$

可推出 $(\tilde{y}_n - y(t_n)) = O(h^{2+\alpha})$.

现在给出总体截断误差. 同样的,分数阶线性多步法的总体截断误差定义为由初始值 $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_s$ 求得的 y_n 与 $y(t_n)$ ($n>s$) 之间的误差.

定理2　对于分数阶常微分方程(5),由分数阶线性多步法(6)($p=2$)求得的 y_n 的总体截断误差为 $O(h^{1+\alpha})$.

证　令 $e_n = y(t_n) - y_n$. 假设 y_0, y_1, y_2 为精确的, 当 $n>2$ 时, y_n 由 $h^{-\alpha}\sum_{j=0}^{n}\omega_j^{(\alpha)}y_{n-j} + h^{-\alpha}\sum_{j=1}^{2}w_{nj}y_j = f_n$ 求得, 而 $h^{-\alpha}\sum_{j=0}^{n}\omega_j^{(\alpha)}y(t_{n-j}) + h^{-\alpha}\sum_{j=1}^{2}w_{nj}y(t_j) + O(h^{2+\alpha}) = f_n$. 两式相减得到:

$$(h^{-\alpha}\omega_0^{(\alpha)})e_n + h^{-\alpha}\sum_{j=1}^{n}\omega_j^{(\alpha)}e_{n-j} + h^{-\alpha}\sum_{j=1}^{2}w_{nj}e_j + O(h^{2+\alpha}) = 0. \tag{7}$$

现在来估计 e_n,将式(7)中的 n 分别取为 $n, n-1, \cdots, 3$ 而得到如下关于 $e_3, \cdots, e_n$ 的线性方程组

$$h^{-\alpha}\omega_0^{(\alpha)}e_n + h^{-\alpha}\omega_1^{(\alpha)}e_{n-1} + \cdots + h^{-\alpha}\omega_{n-3}^{(\alpha)}e_3 = O(h^{2+\alpha})$$

$$h^{-\alpha}\omega_0^{(\alpha)}e_{n-1} + \cdots + h^{-\alpha}\omega_{n-4}^{(\alpha)}e_3 = O(h^{2+\alpha})$$

………

$$h^{-\alpha}\omega_0^{(\alpha)}e_3 = O(h^{2+\alpha})$$

$$B = \begin{pmatrix} h^{-\alpha}\omega_0^{(\alpha)} & h^{-\alpha}\omega_1^{(\alpha)} & \cdots & h^{-\alpha}\omega_{n-3}^{(\alpha)} \\ 0 & h^{-\alpha}\omega_0^{(\alpha)} & \cdots & h^{-\alpha}\omega_{n-4}^{(\alpha)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & h^{-\alpha}\omega_0^{(\alpha)} \end{pmatrix},$$

$$e = \begin{pmatrix} e_n \\ e_{n-1} \\ \cdots \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \cdots \\ b_3 \end{pmatrix},$$

其中 $\begin{pmatrix} b_n \\ \cdots \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O(h^{2+\alpha}) \\ \cdots \\ O(h^{2+\alpha}) \end{pmatrix}$.

对这一线性方程组,只须解出 e_n. 易求 $|B| = (\omega_0^{(\alpha)}h^{-\alpha})^{n-2}$,由克莱姆法则,还需求

$$B' = \begin{pmatrix} b_n & h^{-\alpha}\omega_1^{(\alpha)} & \cdots & h^{-\alpha}\omega_{n-3}^{(\alpha)} \\ b_{n-1} & h^{-\alpha}\omega_0^{(\alpha)} & \cdots & h^{-\alpha}\omega_{n-4}^{(\alpha)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_3 & 0 & \cdots & h^{-\alpha}\omega_0^{(\alpha)} \end{pmatrix}.$$

为计算 $|B'|$,记 $a_i = h^{-\alpha}\omega_i^{(\alpha)}$, $i=0,1,2\cdots$. 由引理1,设 $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\cdots)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots\cdots) = 1$,则可推出 $e_n = \frac{|B'|}{|B|} = b_3c_{n-3} + \cdots\cdots + b_nc_0$. 因为 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\cdots = h^{-\alpha}\omega_2^{(\alpha)}(x)$,所以 $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots\cdots = \frac{1}{h^{-\alpha}\omega_2^{(\alpha)}(x)} = h^{\alpha}\omega_2^{(-\alpha)}(x)$, $\omega_2^{(\alpha)}(x)$ 为 $\{\omega_i^{(\alpha)}; i=0,1,2\cdots\cdots\}$ 的生成函数. 记 $\omega_2^{(-\alpha)}(x)$ 的展开系数为 $\{c_i'; i=0,1,2\cdots\cdots\}$,由引理2, $c_i' = O(i^{\alpha-1})$,所以对任意的 $i>0$, $|c_i'| \le C_1 i^{\alpha-1}$, C_1 与 i 无关. 对每个给定的 n, $0<i\le n$ 时,由式(4)中的 $nh=t$,可推出 $|c_i| = |h^{\alpha}c_i'| \le t^{\alpha}n^{-\alpha}C_1 i^{\alpha-1}| \le |C_1 t^{\alpha}\cdot i^{\alpha}n^{-\alpha}\cdot i^{-1}| \le Ci^{-1} \le C$,而 c_0 也有界,所以 $|e_n| = \left|\frac{|B'|}{|B|}\right| = |b_3c_{n-3} + \cdots\cdots + b_nc_0| \le C(n\,O(h^{2+\alpha})) = O(h^{1+\alpha})$.

现在来做稳定性分析. 稳定性即由不同的初值 y_0 与 y_0' 分别求得 y_n 与 y_n',看是否存在 C 与 n 无关,使 $|y_n - y_n'| \le C|y_0 - y_0'|$.

定理3　对于数值方法(6),由不同的初值 y_0 与 y_0' 求得 y_n 与 y_n',存在 C 与 n 无关,使 $|y_n - y_n'| \le C|y_0 - y_0'|$.

证　记 $y_n - y_n' = \varepsilon_n$, $y_0 - y_0' = \varepsilon_0$. 当 $n>2$ 时,由 $h^{-\alpha}\sum_{j=0}^{n}\omega_j^{(\alpha)}y_{n-j} + h^{-\alpha}\sum_{j=0}^{2}w_{nj}y_j = f_n$ 及

$$h^{-\alpha}\sum_{j=0}^{n}\omega_j^{(\alpha)}y_{n-j}+h^{-\alpha}\sum_{j=0}^{2}w_{nj}y_j=f_n$$

相减得 $$h^{-\alpha}\sum_{j=0}^{n}\omega_j^{(\alpha)}\varepsilon_{n-j}+h^{-\alpha}\sum_{j=0}^{2}w_{nj}\varepsilon_j=0 \qquad (8)$$

要用 $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2$，表示 ε_n，同样的，由式(8)得到下列线性方程组

$$\begin{pmatrix} h^{-\alpha}\omega_0^{(\alpha)} & h^{-\alpha}\omega_1^{(\alpha)} & \cdots & h^{-\alpha}\omega_{n-4}^{(\alpha)} & h^{-\alpha}\omega_{n-3}^{(\alpha)} \\ 0 & h^{-\alpha}\omega_0^{(\alpha)} & \cdots & h^{-\alpha}\omega_{n-5}^{(\alpha)} & h^{-\alpha}\omega_{n-4}^{(\alpha)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & h^{-\alpha}\omega_0^{(\alpha)} & h^{-\alpha}\omega_4^{(\alpha)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h^{-\alpha}\omega_0^{(\alpha)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_n\\ \varepsilon_{n-1}\\ \cdots \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_3\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} h^{-\alpha}(-\omega_n^{(\alpha)}\varepsilon_0-w_{n0}\varepsilon_0-(\omega_{n-2}^{(\alpha)}+w_{n2})\varepsilon_2-(\omega_{n-1}^{(\alpha)}+w_{n1})\varepsilon_1) \\ h^{-\alpha}(-\omega_{n-1}^{(\alpha)}\varepsilon_0-w_{n-1,0}\varepsilon_0-(\omega_{n-3}^{(\alpha)}+w_{n-1,2})\varepsilon_2-(\omega_{n-2}^{(\alpha)}+w_{n-1,1})\varepsilon_1) \\ \cdots \\ h^{-\alpha}(-\omega_4^{(\alpha)}\varepsilon_0-w_{4,0}\varepsilon_0-(\omega_2^{(\alpha)}+w_{4,2})\varepsilon_2-(\omega_3^{(\alpha)}+w_{4,1})\varepsilon_1) \\ h^{-\alpha}(-\omega_3^{(\alpha)}\varepsilon_0-w_{3,0}\varepsilon_0-(\omega_1^{(\alpha)}+w_{3,2})\varepsilon_2-(\omega_2^{(2)}+w_{3,1})\varepsilon_1) \end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}b_n\\ b_{n-1}\\ \cdots\\ b_4\\ b_3\end{pmatrix}$$

记为 Be = b，记 $a_i=h^{-\alpha}\omega_i^{(\alpha)}$；$i=0,1,2\cdots\cdots$. 设 $(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots)(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots)=1$，得 $\varepsilon_n=\frac{|B'|}{|B|}=|b_3c_{n-3}+\cdots\cdots+b_nc_0|$. 因为 $\omega_j^{(\alpha)}=O(j^{-\alpha-1})$，$w_{nj}=O(n^{-\alpha-1})$，所以 $i\geq 3$ 时，由 $nh=t$ 可以推出 $b_i=O(i^{-1})\varepsilon_0$.（$b_i$ 是上述线性方程组右边向

量的分量）可得 $|b_i|\leq C|\varepsilon_0|i^{-1}$. 由定理 2 中证明可类似推出，对任意给定的 n，$0<i\leq n$ 时，$|c_i|\leq Ci^{-1}$，

$$|\varepsilon_n|=|\frac{|B'|}{|B|}|=|b_3c_{n-3}+\cdots\cdots+b_nc_0|\leq C(\frac{1}{3(n-3)}+\cdots\cdots\frac{1}{(n-2)2}+\frac{1}{(n-1)1})|\varepsilon_0|+|b_nc_0|.$$

又因为 $1\leq i\leq n-1$ 时，$(n-i)i-(n-1)=(i-1)(n-1-i)\geq 0$，所以 $(n-i)i\geq n-1$，得 $1/((n-i)i)\leq 1/(n-1)$，

推出 $|\varepsilon_n|\leq C((n-3)/(n-1))|\varepsilon_0|+|b_n/a_0|\leq C|\varepsilon_0|$，所以 $|\varepsilon_n|\leq C|\varepsilon_0|$.

5 数值例子

例 1 ${}_0D_t^{1.5}y(t)=12t-6\sqrt{t}$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$，$0\leq t\leq 1$.

其方程的精确解为 $y(t)=12\Gamma(2)t^{2.5}/\Gamma(3.5)-6\Gamma(1.5)t^2/\Gamma(3)$. 数值解和精确解以及误差估计见表 1.

记 $X=\{0,h,2h,\cdots\cdots,1\}$，则 $\max|\tilde{y}(x)-y(x)|=0.003\,334\,544\,361\,390\,7\ (x=1)$

例 2 ${}_0D_t^{\alpha}y(t)=te^{-t}$，$0\leq n-1<\alpha<n\leq 2$，$0\leq t\leq 10$，$y^{(i)}(0)=0$，$i=0,1,\cdots,n-1$

当 α 是 0，1，2 时其精确解可以显式的求出来. 当 α 不是整数时无法显式的求出解析解，只能给出数值解. 我们感兴趣的是当 α 从 0 变到 1 和从 1 变到 2 时解的性态. 图 1 给出了 α 从 0 变到 1 和从 1 变到 2 时解的曲线图形.

表 1 ($n=100$) 数值解和精确解以及误差估计

Tab. 1 ($n=100$) Numerical solution, exact solution and error estimate

t	$\tilde{y}(t)$	$y(t)$	$\tilde{y}(t)-y(t)$
0.2	-0.040 472 635 270 956 7	-0.041 755 038 490 528 2	0.001 282 403 219 571 6
0.4	-0.058 021 221 838 517 2	-0.060 000 305 228 835 4	0.001 979 083 390 318 2
0.6	0.052 273 167 832 417 0	0.049 767 554 145 676 9	0.002 505 613 686 740 1
0.8	0.368 341 399 844 829 2	0.365 394 465 171 530 0	0.002 946 934 673 299 3
1.0	0.955 467 102 711 934 5	0.952 132 558 350 543 8	0.003 334 544 361 390 7

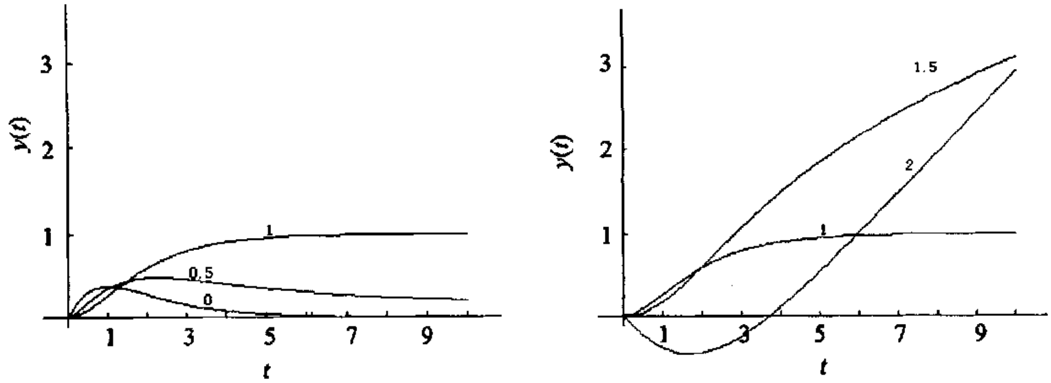

图 1　从 0 变到 1 和从 1 变到 2 时解的曲线图形

Fig. 1　Graph of solution, from 0 to 1 and from 1 to 2

参考文献:

[1] Gorenflo R, Vessella S. Abel integral equations [A]. Analysis and Applications, Lecture Notes in Mathematics [C]. Berlin: Springer-Verlag, 1991.

[2] Rossikhin Yu A, Shitikova M V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids [J]. Appl. Mech. Rev., 1997, 50(1): 16 - 67.

[3] Benson D A, Wheatcraft S W, Meerschert M M. Application of a fractional advection-despersion equation [J]. Water Resour. Res., 2000, 36(6), 1 403 - 1 412.

[4] Wyss W. The fractional Black-Scholes equation [J]. Fractional Calculus Appl. Anal., 2000, 3: 51 - 61.

[5] Podlubny I. Fractional Differential Equations [M]. New York: Academic Press, 1999.

[6] Lubich Ch. Discretized fractional calculus [J]. SIAM J. Math. Anal., 1986, 17(3): 704 - 719.

[7] 波利亚 G, 舍贵 G. 数学分析中的问题和定理(第二卷) [M]. 上海:上海科学技术出版社, 1985. 115.

High Order Approximations for the Fractional Ordinary Differential Equation with Initial Value Problem

LIN Ran, LIU Fa-wang

(Mathematic Department, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: Numerical method of integral order ordinary differential equation, for example, Euler method, linear multiple step method, and so on, has had quite perfect theories. Theoretical studies of the numerical method and the error estimate of fractional order differential equation are very little. In this paper, the simplest fractional order ordinary differential equation is considered. A fractional order linear multiple step method is introduced, a high order approximation of fractional order ordinary differential equation with initial value is derived, and the consistence, convergence and stability of the method are proved. Finally, some numerical examples are provided to show that the fractional order linear multiple step method for solving the fractional order ordinary differential equation is an effective method.

Key words: fractional order ordinary differential equation; fractional order linear multiple step method; consistence; convergence; stability