第 43 卷　第 1 期
2004 年 1 月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol. 43　No. 1
Jan. 2004

文章编号: 0438-0479(2004)01-0014-03

不适定的 P-Laplace 发展方程弱解对初始时刻几何的连续依赖性

陈　展, 谭　忠
(厦门大学数学系, 福建 厦门 361005)

摘要: 研究了从非牛顿流体力学中提出的一类前向 P-Laplace 发展方程的不适定性问题的弱解对初始时刻几何的连续依赖性, 导出了一个仅依赖初始数据的显式的连续依赖性的格式.

关键词: 不适定性问题; P-Laplace 方程; 初始时刻几何; 连续依赖性
中图分类号: O 175.29　　文献标识码: A

1 主要结论

关于初始时刻几何的连续依赖性的研究最初由 Knops 和 Payne[1] 开始的, 他们在线性弹性方程中研究了这类问题, 用了对数凸性的方法研究了线性弹性算子的不适定问题在初始时刻几何的连续依赖性. 那些结果由 Knops 和 Payne 在文献[2] 中用 Lagrange 恒等方法明显提高. 此后的许多年, 越来越多方程的不适定问题被广泛研究[3~10]. 但上述论文都仅处理了 Laplace 算子等线性算子的情形, 本文考虑非线性算子的情形.

为了叙述本文的主要结果, 先引进一些有用的记号和叙述与本文有关的结果. 设 Ω 是 R^N 中的有界区域, 具有光滑边界 $\partial\Omega$, 设 $\sum$ 表示曲面 $t=\varepsilon f(x)$ 且假设:

$$|f(x)|< 1.$$

对 $\delta>0$,

$$n_t<-\delta$$

这里 n_t 是关于 $\sum$ 在时间 t 方向上的单位法向分支; n_i 将用来表示在空间方向上的分量. Payne 考虑了如下问题, 设 $u(x,t)$ 是初边值问题的解

$$\begin{cases} u_t=\triangle u, & 在\ \Omega\times(0,T)\ 上 \\ u=0, & 在\ \partial\Omega\times[0,T)\ 上 \\ u(x,0)=g(x), & x\in\Omega \end{cases} \tag{1}$$

且设 $v(x,t)$ 是初边值问题的解:

$$\begin{cases} v_t=\triangle v, & x\in\Omega,\ t\in(\varepsilon f(x),T) \\ v=0, & x\in\partial\Omega,\ x\in[\varepsilon f(x),T) \\ v(x,\varepsilon f(x))=g(x), & x\in\Omega \end{cases} \tag{2}$$

Payne 得到了

$$\|u(t)-v(t)\|_2^2\leqslant M^2\varepsilon \tag{3}$$

这里 $\|\cdot\|^p$ 表示 $L^p(\Omega)$ 的模, M^2 是某个适当的常数.

不等式(3) 表明了解对初始时刻几何的连续依赖性. 本文将这一结论推广到非线性算子 P-Laplace 算子的情形, 即考虑: 假定 $u(x,t)$ 是初边值问题的解:

$$\begin{cases} u_t=\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), & 在\ \Omega\times(0,T)\ 上 \\ u=0, & 在\ \partial\Omega\times[0,T)\ 上 \\ u(x,0)=g(x), & x\in\Omega \end{cases} \tag{4}$$

而 $v(x,t)$ 是下面初边值问题的解:

$$\begin{cases} v_t=\operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v),\ x\in\Omega, \\ \qquad t\in(\varepsilon f(x),T) \\ v=0, & x\in\partial\Omega,\ x\in[\varepsilon f(x),T) \\ v(x,\varepsilon f(x))=g(x), & x\in\Omega \end{cases} \tag{5}$$

其中 $2\leqslant p<N$. 我们的主要结论是:

定理 1.1　设 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 分别是初边值问题(4)、(5) 的解. 则存在常数 M

收稿日期: 2003-06-20
基金项目: 国家自然科学基金(10171083)资助
作者简介: 陈展(1978-), 男, 硕士研究生.

$$M^2 = 3\left(\frac{1}{p}\int_\Omega |g_i|^p \mathrm{d}x + \frac{p}{4\delta(p-1)}\int_\Sigma |\nabla g|^{p-2}\left(\frac{\partial g}{\partial s}n_i - \nabla g\, n_t\right)^2 \mathrm{d}A\right)$$

使得：

$$\|u(t) - v(t)\|^2 \leqslant M^2 \varepsilon.$$

由于本文考虑的 P-Laplace 算子失去线性特征，Payne 的方法不能照搬．因此，必须克服 P-Laplace 算子带来的困难．

2　主要结果的证明

在证明主要结论之前，首先阐述一个将要用到的重要的引理结论．（详细的证明过程见文献[12]）

引理 2.1　存在 $c_0 > 0$ 使得：

$$[\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u - \|\nabla v\|^{p-2}\nabla v][\nabla u - \nabla v] \geqslant c_0 |\nabla u - \nabla v|^p \tag{6}$$

接下来是定理的证明．

令 $w = u - v$ 那么在 $\Omega \times (\varepsilon f(x), T)$ 上 w 满足方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v) \tag{7}$$

且有边界条件：

$$w = 0,\ x \in \partial\Omega.$$

式(7)两边同乘 w 并在 Ω 上积分有：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|w(t)\|^2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |w(t)|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega w w_t \mathrm{d}x = -\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)(\nabla u - \nabla v)\mathrm{d}x \tag{8}$$

由引理 2.1 得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|w(t)\|^2}{\mathrm{d}t} \leqslant -c_0\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p \mathrm{d}x = -c_0\|\nabla w(t)\|_p^p \leqslant -c_1\|w(t)\|_p^p \leqslant -c_2(\|w(t)\|^2)^{\frac{p}{2}} \leqslant 0 \tag{9}$$

其中 c_0, c_1, c_2 都是正常数．所以从式(9)可以得到

$$\|w(t)\|^2 \leqslant \|w(\varepsilon)\|^2 \tag{10}$$

接下来就求 $\|w(\varepsilon)\|$ 的界．我们发现

$$u(x, \varepsilon) = g(x) + \int_0^\varepsilon u_s(x, s)\mathrm{d}s,$$

$$v(x, \varepsilon) = g(x) + \int_{\varepsilon f(x)}^\varepsilon v_s(x, s)\mathrm{d}s,$$

这样有：

$$\|w(\varepsilon)\|^2 = \int_\Omega \left(\int_0^\varepsilon u_s(x, s)\mathrm{d}s - \int_{\varepsilon f(x)}^\varepsilon v_s(x, s)\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}x.$$

应用算术几何平均不等式有：

$$\|w(\varepsilon)\|^2 \leqslant 3\int_\Omega \left(\int_0^\varepsilon u_s \mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int_\Omega \left(\int_{\varepsilon f(x)}^\varepsilon v_s \mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}x \tag{11}$$

利用 Schwarz 不等式和前面的条件 $1 - f \leqslant 2$ 可以得到：

$$\|w(\varepsilon)\|^2 \leqslant 3\varepsilon\left[\int_0^\varepsilon\int_\Omega u_s^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s + \int_\Omega\int_{\varepsilon f(x)}^\varepsilon v_s^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}x\right] = 3\varepsilon[J_1 + J_2] \tag{12}$$

其中

$$J_1 = \int_0^\varepsilon \left\|\frac{\partial u}{\partial s}\right\|^2 \mathrm{d}s,$$

$$J_2 = \int_\Omega\int_{\varepsilon f(x)}^\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}x.$$

下面再分别求 J_1, J_2 的界．

利用分部积分可以得到：

$$J_1 = \int_0^\varepsilon\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial s}\mathrm{div}[|\nabla u|^{p-2}\nabla u]\mathrm{d}x\mathrm{d}s = -\int_0^\varepsilon\int_\Omega \frac{\partial}{\partial s}\nabla u \cdot [|\nabla u|^{p-2}\nabla u]\mathrm{d}x\mathrm{d}s = -\frac{1}{p}\int_0^\varepsilon\int_\Omega \frac{\partial |\nabla u|^p}{\partial s}\mathrm{d}x\mathrm{d}s = \frac{1}{p}\int_\Omega |g_i|^p \mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x\Big|_{t=\varepsilon} \leqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |g_i|^p \mathrm{d}x \tag{13}$$

同时也可以得到 J_2 的界．

$$J_2 = \int_\Omega\int_{\varepsilon f(x)}^\varepsilon \frac{\partial v}{\partial s}\mathrm{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)\mathrm{d}s\mathrm{d}x = \int_\Sigma \frac{\partial v}{\partial s}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\, n_i \mathrm{d}A - \int_\Omega\int_{\varepsilon f(x)}^\varepsilon |\nabla v|^{p-2}\nabla v \frac{\partial \nabla v}{\partial s}\mathrm{d}x\mathrm{d}s \leqslant \int_\Sigma |\nabla v|^{p-2}\nabla v \frac{\partial v}{\partial s}n_i \mathrm{d}A - \frac{1}{p}\int_\Sigma |\nabla v|^p n_t \mathrm{d}A = \left(\int_\Sigma |\nabla v|^{p-2}\nabla v\frac{\partial v}{\partial s}n_i \mathrm{d}A - \int_\Sigma |\nabla v|^p n_t \mathrm{d}A\right) + \frac{p-1}{p}\int_\Sigma |\nabla v|^p n_t \mathrm{d}A \tag{14}$$

因为 $n_t < -\delta$

$$J_2 \leqslant \left(\int_{\Sigma} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \frac{\partial v}{\partial s} n_i \mathrm{d}A - \int_{\Sigma} |\nabla v|^p n_t \mathrm{d}A\right) - \frac{(p-1)\delta}{p}\int_{\Sigma} |\nabla v|^p \mathrm{d}A$$

$$= \int_{\Sigma} |\nabla v|^{\frac{p}{2}-1} |\nabla v|^{\frac{p}{2}-1} \nabla v \left(\frac{\partial v}{\partial s} n_i - \nabla v n_t\right)\mathrm{d}A - \frac{(p-1)\delta}{p}\int_{\Sigma} |\nabla v|^p \mathrm{d}A \leqslant$$

$$\frac{p}{4\delta(p-1)}\int_{\Sigma} |\nabla v|^{p-2} \left|\frac{\partial v}{\partial s} n_i - \nabla v n_t\right|^2 \mathrm{d}A \leqslant$$

$$\frac{p}{4\delta(p-1)}\int_{\Sigma} |\nabla g|^{p-2} \left|\frac{\partial g}{\partial s} n_i - \nabla g n_t\right|^2 \mathrm{d}A \tag{15}$$

所以

$$\| w(t) \|^2 \leqslant \| w(\varepsilon) \|^2 \leqslant M^2 \varepsilon$$

$$M^2 = 3\left(\frac{1}{p}\int_{\Omega} |g_i|^p \mathrm{d}x + \frac{p}{4\delta(p-1)}\int_{\Sigma} |\nabla g|^{p-2}\left(\frac{\partial g}{\partial s} n_i - \nabla g n_t\right)^2 \mathrm{d}A\right) \tag{16}$$

问题得证.

致谢:作者衷心感谢赵俊宁教授的鼓励!

参考文献:

[1] Knops R J, Payne L E. Continuous data dependence for the equations of classical elastodynamics[J]. Proc. Camb. Phil. Soc., 1969, 66: 481—491.

[2] Knops R J, Payne L E. Improved estimates for continuous data dependence in linear elastodynasmics[J]. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1988, 103: 535—559.

[3] Ames K A, Payne L E. Continuous dependence on initial-time geometry for a thermoelastic system with sign-indefinite elasticities[J]. J. Math. Anal. Appl., 1995, 189: 693—714.

[4] Ames K A, Straughan B. Estimates of the error in the initial-time geometry for a parabolic equation from dynamo theory[J]. J. Differential Equations, 1995, 123: 153—170.

[5] Franchi F, Straughan B. Effects of errors in the initial-time geometry on the solution of an equation from dynamo theory in an exterior domain[J]. Proc. Roy. Soc. London A, 1995, 450: 109—121.

[6] Payne L E, Straughan B. Unconditional nonlinear stability in temperature-dependent viscosity flow in a porous medium[J]. Stud. Appl. Math., 2000, 105(1): 59—81.

[7] Song J C. Some Stability Criteria in Fluid and Solid Mechanics[D]. New York: Cornell University, 1988.

[8] Knops R J, Payne L E. Continuous dependence on base data in an elastic prismatic cylinder[J]. J. Elasticity, 2001, 64(2—3): 179—190.

[9] Lin changhao, Payne L E. Contiunous dependence on spatial geometry for the generalized Maxwell-Cattaneo System[J]. Math. Methods Appl. Sci., 2001, 24(14): 1 113—1 124.

[10] Payne L E, Schaefer P W. Energy bounds for some nonstandard problems in partial differential equations [J]. J. Math. Anal. Appl., 2002, 273(1): 75—92.

[11] Lindovist P. On the Equation div($|\nabla v|^{p-2}\nabla v$) + $\lambda |u|^{p-2}u = 0$[J]. Proc. of the American Math. Soc., 1990, 109(1): 157—164.

[12] 杨世廞.非线性退缩椭圆型方程的比较原理及方程组的边值问题[J].厦门大学学报(自然科学版), 1992, 31(4): 339—340.

The Continuous Dependence on the Initial-time Geometry for the Weak Solutions of Improperly Posed P-Laplace Equation

CHEN Zhan, TAN Zhong

(Department of Mathematics, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: In this paper, we study the continuous dependence on the initial-time geometry of the improperly posed forward-in-time problem for weak solutions to P-Laplace evalution equation which arise in Non-Newton fluid dynamic. An explicit continuous dependence inequality depending solely on data is derived.

Key words: improperly posed problem; P-Laplace evolution equation; initial-time geometry; continuous dependence