总 35卷 第 2期
2002年 6月
数 学 研 究
Journal of Mathematical Study
Vol 35 No. 2
Jun. 2002

广义 de Bruijn有向图及其叠线图的支撑树与欧拉环游的计数

林 秋 英
(厦门大学数学系, 福建 厦门 361005)

摘 要 给出了一类特殊的广义 de Bruijn有向图的支撑树与欧拉环游的数目的简洁表示式. 并得到广义 de Bruijn有向叠线图的支撑树与欧拉环游数目的计算公式.

关键词 广义 de Bruijn有向图; 叠线图; 支撑树; 欧拉环游
中图分类号 O 157.6 文献标识码 A

1 引言与定义

广义 de Bruijn有向图是一类由 Imase和 Itoh引入的有向图, 它描绘一类具有优良性能的网络结构, 并以 de Bruijn图为其特例 (见 [4, 5, 6]). 广义 de Bruijn有向图包含两类有向图, 一类是 $G_B(n, d)$, 其顶点可标号为 $0, 1, \cdots, n-1$, 其中 $n > d$, 其弧集是由以下弧构成的.

$$i \to di + r \pmod n, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1, \quad 0 \leqslant r \leqslant d-1$$

另一类广义 de Bruijn有向图是 $G_I(n, d)$, 其顶点标号同 $G_B(n, d)$, 其弧集是由以下弧构成的,

$$i \to d(n-1-i) + r \pmod n, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1, \quad 0 \leqslant r \leqslant d-1$$

由于广义 de Bruijn有向图有重要的实际背景, 现已被广泛地应用为网络与多处理器系统的模型. 很多学者已对其做了一定研究. 在文 [7]中, D. Z. Du与 F. K. Hwang讨论了广义 de Bruijn有向图的连通度问题. 在文 [1]中, 李学良与张福基提出了此类图的支撑树与欧拉环游的计算公式. 但我们发现, 此计算公式对一般广义 de Bruijn有向图而言, 其计算表达式中含有复数, 而我们通常希望给出不含复数的表达式. 在本文中, 我们找到了一类特殊的广义 de Bruijn有向图, 其支撑树与欧拉环游是有不含复数的简洁明确的计算结果. 本文还进一步考虑广义 de Bruijn有向图的任意次叠线图的情况. 事实上, 叠线图在构造网络中扮演着重要的角色 (见 [8]).

有向图 $D = (V, A)$的线图 $L(D)$定义如下: D 的所有弧构成 $L(D)$的顶点集, 即 $V(L(D)) = \{uv \mid (u, v) \in A\}$, 在 $L(D)$ 中, 要从顶点 uv 连接到顶点 wz, 当且仅当 $v = w$.

由此可定义 $L^0(D) = D$, $L^{i+1}(D) = L(L^i(D))$, $i \geqslant 0$, 从而得到叠线图.

本文将得到广义 de Bruijn有向叠线图的支撑树与欧拉环游数目的计算公式.

* 收稿日期: 2001-12-20收到

2 主要结果

我们首先给出一些定义与引理.

定义 1 ([1]的引理 3)

设 n 与 d 为两个正整数, 则必存在唯一正整数 u, v, s和 t, 使得:

(1) $n = uv$, $d = st$

(2) s与 u有相同的素数分解因子. (u的每个素数因子的重数有可能不同于 s的相应素数因子的重数).

(3) u与 t的最大公约数 $gcd(u, t) = 1$, v 与 d 的最大公约数 $gcd(v, d) = 1$.

则我们叫这种分解为 n 与 d的相关分解.

引理 1 ([1]的定理 6, 7)

设 $n = uv$, $d = st$为 n与 d的相关分解, $T(D)$表示为有向图D 的支撑树数目, $N(D)$表示为有向图D 的欧拉环游数目.

(1) 若 $v = 1$, 则

$$T(G_B(n, d)) = d^{n-1},$$

$$T(G_I(n, n-d)) = (n-d)^{n-1}$$

$$N(G_B(n, d)) = \frac{1}{n} d^{n-1}((d-1)!)^n,$$

$$N(G_I(n, n-d)) = \frac{1}{n}(n-d)^{n-1}((n-d-1)!)^n$$

(2) 若 $v > 1$, 则

$$T(G_B(n, d)) = d^{s_0}\prod_{i=1}^{m}(d-W_i)^{s_i}$$

$$T(G_I(n, n-d)) = (n-d)^{s_0}\prod_{i=1}^{m}(n-d+W_i)^{s_i}$$

$$N(G_B(n, d)) = \frac{1}{n} d^{s_0}\prod_{i=1}^{m}(d-W_i)^{s_i}((d-1)!)^n$$

$$N(G_I(n, n-d)) = \frac{1}{n}(n-d)^{s_0}\prod_{i=1}^{m}(n-d+W_i)^{s_i}((n-d-1)!)^n$$

其中 $m = \mathrm{ind}_v^d$, 即m 为最小正整数使得 $d^m = kv + 1$, k为一任意整数; W_i ($1 \leqslant i \leqslant m$) 为 1的 m 次根, 且 $W_1 = 1$;

$$s_i = \begin{cases} n - g_m & (i = 0) \\ -1 + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} g_j & (i = 1) \\ \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} g_j W_i^{m-j} & (2 \leqslant i \leqslant m) \end{cases}$$

其中 $g_i = gcd(n, d_i - 1)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $d^i = k_i n + d_i$, $0 \leqslant d_i \leqslant n-1$

引理 2 ([3]的定理 1)

设D 为有 n个顶点的 k正则有向图, 令 $L^r(D)$为D 的 r次叠线图, $T(L^r(D))$表示 $L^r(D)$

的支撑树数目, 则

$$T(L^r(D)) = k^{nkr-n}T(D)$$

引理 3 ([9]或 [3]的引理 5)

设 D 为有 n 个顶点的 k 正则有向图, $N(D)$ 表示为其欧拉环游的数目, 则

$$N(D) = \frac{1}{n}T'(D)((k-1)!)^n$$

其中 $T'(D)$ 表示为以 D 的任一顶点为根的有向支撑树的数.

对于广义 de Bruijn 有向图 $G_B(n, d)$, $G_I(n, n-d)$, 设 n 的素数因子的集合为 T_n, $T_n = \{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$, $n = \prod_{i=1}^{p} a_i^{r_i}$, 设 d 的素数因子的集合为 T_d, $T_d = \{b_1, b_2, \cdots, b_q\}$, $d = \prod_{i=1}^{q} b_i^{r'_i}$. 令 $n = uv$, $d = st$ 为 n 与 d 的相关分解. 则易见 $T_n \subseteq T_d$ 当且仅当 $v = 1$ 此时可用引理 1(1) 中的公式计算 $G_B(n, d)$ 与 $G_I(n, n-d)$ 的支撑树与欧拉环游数目.

定理 1 $T_n \nsubseteq T_d$ 当且仅当 $v \geqslant 1$

此时设 $T_{\bar{n}} = \{a_i | a_i \in T_n 且 a_i \notin T_d\}$

若 $T_{\bar{n}} = \{a_j\}$ 且 $r_j = 1$, 则

$$T(G_B(n, d)) = d^{n-a_j}(d^m - 1)^{\frac{a_j-1}{m}},$$

$$T(G_I(n, n-d)) = (n-d)^{n-a_j}[(n-d)^m - (-1)^m]^{\frac{a_j-1}{m}}$$

$$N(G_B(n, d)) = \frac{1}{n}d^{n-a_j}(d^m - 1)^{\frac{a_j-1}{m}}((d-1)!)^n,$$

$$N(G_I(n, n-d)) = \frac{1}{n}(n-d)^{n-a_j}[(n-d)^m - (-1)^m]^{\frac{a_j-1}{m}}((n-d-1)!)^n$$

其中 m 的定义同引理 1.

证明 显然, $T_n \nsubseteq T_d$ 当且仅当 $v > 1$.

当 $T_{\bar{n}} = \{a_j\}$ 且 $r_j = 1$ 时, 显然 $p - 1 \leqslant q$

我们不妨设 $j = p$, $T_{\bar{n}} = \{a_p\}$, $r_p = 1$, 且 $b_i = a_i$, 其中 $1 \leqslant i \leqslant p-1$, 则 n 与 d 的相关分解可表示为:

$n = uv$, 其中 $u = \prod_{i=1}^{p-1} a_i^{r_i}$, $v = a_p$

$d = st$, 其中 $s = \prod_{i=1}^{p-1} b_i^{r'_i}$, $t = \prod_{i=p}^{q} b_i^{r'_i}$ (当 $q > p-1$ 时) 或 $t = 1$ (当 $q = p-1$ 时)

易验证, u 与 s 有相同素数因子, $\gcd(u, t) = 1$, 且 $\gcd(v, d) = 1$, 所以满足 u 与 d 的相关分解的条件.

由引理 1 定义 $m = \mathrm{ind}_v^d$, 故可设

$$\begin{cases} d^m = kv + 1 = ka_p + 1 \\ d^i = k'_i a_p + p_i, \quad (1 \leqslant i < m), \text{ 其中 } p_i \neq 1 \end{cases} \tag{1}$$

显然还可知 $p_i \neq 0$, 否则 $d^i = k'_i a_p$, 可得 $\gcd(d, a_p) \neq 1$, 与 u 和 d 的相关分解条件矛盾. 综上可得, $2 \leqslant p_i \leqslant a_p - 1$, $(1 \leqslant i < m)$

又由引理 1, 知

$$g_i = gcd(n, d_i - 1),\quad d^i = k_i n + d_i,\quad 1\leqslant i\leqslant m,\ 0\leqslant d_i\leqslant n-1$$

现我们证明 a_t, $1\leqslant t\leqslant p-1$, 不是 $d_i - 1$的素数因子.

假设某个 a_t为 $d_i - 1$的一个素数因子, 则不妨设 $d_i - 1 = a_t Z$, 其中 Z 为整数.

则
$$d^i - k_i n - a_t Z = 1$$
$$\left(\frac{d^i}{a_t} - \frac{k_i n}{a_t} - Z\right) a_t = 1 \tag{2}$$

已知: a_t, $1\leqslant t\leqslant p-1$是 d的素数因子, 也是 n的素数因子, 所以显然$\left(\frac{d^i}{a_t} - \frac{k_i n}{a_t} - Z\right)$必为整数, 又因为 $a_t > 1$, 所以 (2) 式不可能成立.

因此我们可得以下结论:

a_t, $1\leqslant t\leqslant p-1$, 都不是 $d_i - 1$ ($1\leqslant i\leqslant m$) 的素数因子. (*)

现取 $i = m$, 可得　$g_m = gcd(n, d_m - 1)$,　$d^m = k_m n + d_m$

结合 (1)式, 有

$$g_m = gcd(n, d^m - k_m n - 1) = gcd(n, ka_p + 1 - k_m n - 1) = gcd(n, ka_p - k_m n)$$

显然 a_p 是 $ka_p - k_m n$的一个素数因子.

结合结论 (*)可知　$g_m = gcd(n, d_m - 1) = a_p$

再取 $1\leqslant i< m$, 可得　$g_i = gcd(n, d_i - 1)$,　$d^i = k_i n + d_i$,

结合 (1)式, 有　$g_i = gcd(n, k'_i a_p + p_i - k_i n - 1)$

因为 $2\leqslant p_i\leqslant a_p - 1$, 即 $1\leqslant p_i - 1\leqslant a_p - 2$, 所以可证 a_p 不是 $k'_i a_p - k_i n + p_i - 1$的素数因子.

否则, 不妨设 $k'_i a_p - k_i n + p_i - 1 = a_p Z'$, 其中 Z' 为整数, 故有

$$\left(Z' - k'_i + \frac{k_i n}{a_p}\right) a_p = p_i - 1 \tag{3}$$

因为 a_p 是 n的一个素数因子, 所以 $Z' - k'_i + \frac{k_i n}{a_p}$ 是一整数, 又因为 $p_i - 1 < a_p$, (3)式不可能成立. 所以 a_p 也不是 $k'_i a_p - k_i n + p_i - 1$, $1\leqslant i < m$ 的一个素数因子.

结合结论 (*) 可得, 当 $1\leqslant i < m$ 时,

$$g_i = gcd(n, d_i - 1) = 1$$

再利用引理 1, 求出

$$s_0 = n - g_m = n - a_p,$$
$$s_1 = -1 + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} = -1 + \frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^{m-1} 1 + a_p\right) = \frac{a_p - 1}{m}$$

$2\leqslant i\leqslant m$ 时,

$$s_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} g_j W_i^{m-j} = \frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^{m-1} W_i^{m-j} + g_m W_i^{m-m}\right)$$
$$= \frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^{m} W_i^{m-j} - W_i^0 + a_p\right) = \frac{1}{m}(0 - 1 + a_p) = \frac{a_p - 1}{m}$$

所以

$$T(G_B(n, d)) = d^{s_0}\prod_{i=1}^{m}(d - W_i)^{s_i} = d^{n-a_p}\prod_{i=1}^{m}(d - W_i)^{\frac{a_p - 1}{m}}$$

由 W_i 的定义知 $d^m - 1 = \prod_{i=1}^{m}(d - W_i)$，则

$$T(G_B(n,d)) = d^{n-a_p}(d^m - 1)^{\frac{a_p - 1}{m}}$$

类似地，

$$T(G_I(n, n-d)) = (n-d)^{s_0}\prod_{i=1}^{m}(n-d+W_i)^{s_i}$$

$$= (n-d)^{n-a_p}\left\{\prod_{i=1}^{m}[n-d-(-W_i)\right\}^{\frac{a_p-1}{m}}$$

由 W_i 的定义知

$$(n-d)^m - (-1)^m = \prod_{i=1}^{m}[n-d-(-W_i)]$$

所以

$$T(G_I(n, n-d)) = (n-d)^{n-a_j}[(n-d)^m - (-1)^m]^{\frac{a_p-1}{m}}$$

利用引理 3，即可得

$$N(G_B(n,d)) = \frac{1}{n}d^{n-a_p}(d^m - 1)^{\frac{a_p-1}{m}}((d-1)!)^n$$

$$N(G_I(n,n-d)) = \frac{1}{n}(n-d)^{n-a_p}[(n-d)^m - (-1)^m]^{\frac{a_p-1}{m}}((n-d-1)!)^n$$

因此定理得证.

定理 2 令 $L^r(D)$ 为有向图 D 的第 r 次叠线图，则

当 $v = 1$ 时，

$$T(L^r(G_B(n,d))) = d^{nd^r-1}, \qquad T(L^r(G_I(n,n-d))) = (n-d)^{n(n-d)^r-1}$$

$$N(L^r(G_B(n,d))) = \frac{1}{nd^r}d^{nd^r-1}((d-1)!)^{nd^r}$$

$$N(L^r(G_I(n,n-d))) = \frac{1}{nd^r}(n-d)^{n(n-d)^r-1}((n-d-1)!)^{nd^r}$$

当 $v > 1$ 时，

$$T(L^r(G_B(n,d))) = d^{nd^r-n+s_0}\prod_{i=1}^{m}(d-W_i)^{s_i}$$

$$T(L^r(G_I(n,n-d))) = (n-d)^{n(n-d)^r-n+s_0}\prod_{i=1}^{m}(d-W_i)^{s_i}$$

$$N(L^r(G_B(n,d))) = \frac{1}{nd^r}d^{nd^r-n+s_0}\prod_{i=1}^{m}(d-W_i)^{s_i}((d-1)!)^{nd^r}$$

$$N(L^r(G_I(n,n-d))) = \frac{1}{nd^r}(n-d)^{n(n-d)^r-n+s_0}\prod_{i=1}^{m}(n-d+W_i)^{s_i}((n-d+1)!)^{nd^r}$$

其中 m, W_i, s_i 定义同引理 1.

证明 显然 $G_B(n,d)$ 是 n 个顶点的 d 正则有向图，$G_I(n,n-d)$ 是 n 个顶点的 $n-d$ 正则有向图，由引理 2可得，

$$T(L^r(G_B(n,d))) = d^{nd^r-n}T(G_B(n,d))$$

$$T(L^r(G_I(n, n-d))) = (n-d)^{n(n-d)r-n}T(G_I(n, n-d))$$

另可见 $L^r(G_B(n, d))$ 是 nd^r 个顶点, d 正则的广义 de-Bruijn有向图, $L^r(G_I(n, n-d))$ 是 nd^r 个顶点, $n-d$ 正则的广义 de-Bruijn有向图, 且由引是 3中 $T'(D)$ 的定义易知,

$$T'(L^r(G_B(n, d))) = \frac{1}{nd^r}T(L^r(G_B(n, d)))$$

$$T'(L^r(G_I(n, n-d))) = \frac{1}{nd^r}T(L^r(G_I(n, n-d)))$$

利用引理 1及引理 3,代入计算,我们便可得上述结论. □

作者在此感谢张福基老师对本文的热心指导.

参 考 文 献

[1] Li Xueliang, Zhang Fuji. On the numbers of spanning trees and Eulerian tours in generalized de Bruijn graphs. Discrete Mathematics, 1991, 94: 189~197

[2] Zhang Fuji, Yong Xuerong. Asymptotic enumeration theorems for the numbers of spanning trees and Eulerian trails in circulant digraphs and graphs. Science in China, March 1999, 42(3):

[3] H S Zhang et al. On the number of spanning trees and Eulerian tours in iterated line digraphs. Discrete Appl. Mathematics, 1997, 73: 59~67

[4] Imase M, Itoh M. Design to minimize diameter on building-block network. IEEE Trans. Comput. 1981, 30: 439~442

[5] Imase M, Itoh M. A design for directed graphs with minimum diameter. IEEE Trans. Comput. 1983, 32: 782~784

[6] Reddy S M, Pradhan D K, Kuhl J G. Directed graphs with minimum diameter and maximal connectivity. School of Engineering, Oakland Univ., Tech. Report, July 1980

[7] Du D Z, Hwang F K. Generalized de Bruijn digraphs. Networks, 1988, 18(1): 27~38

[8] Miguel A, Fiol J. Luis andres yebra and ignacio alegre de miquel. Line digraph iterations and the (d, k) digraph problem. IEEE Trans. Comput. May 1984, 33(5): 400~403

[9] Chen W K. Applied Graph Theory, Amsterdam: North-Holland, 1971

On the Numbers of Spanning Trees and Eulerian Tours in Generalized de Bruijn Digraphs and Their Iterated Line Digraphs

Lin Qiuying

(Department of Mathematics, Xiamen University, Fujiang Xiamen 361005)

Abstract In this paper, we obtained a simple expresion of the number of spanning trees and Eulerian tours in a special kind of generalized de Bruijn digraphs. Furthermore, we also discussed the case in the iterated line digraphs of generalized de Bruijn digraphs.

Key words generalized de Bruijn digraph; iterated line digraph; spanning tree; Eulerian tour