第 41 卷 第 1 期
2002 年 1 月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol. 41 No. 1
Jan. 2002

文章编号: 0438-0479(2002)01-0010-03

Euclidean 型路代数预投射倾斜模与完全切片模

王敏雄[1], 林亚南[2]

(1. 华侨大学数学系, 福建 泉州 362011; 2. 厦门大学数学系, 福建 厦门 361005)

摘要: 证明了: 设 Euclidean 型路代数的倾斜模 T 为预投射模(或预入射模), 若其不可分解直和项在不同的 τ-轨道上, 则 T 为完全切片模.

关键词: 倾斜模; 路代数; 切片模

中图分类号: O 153. 3 文献标识码: A

1 基本概念与主要结论

本文总约定代数 A 是代数闭域 k 上的基的带单位元的有限维代数. 模总指有限生成右 A-模, 用 modA 表示代数 A-模范畴. 本文不区分一个模和它的同构类, 不区分一个不可分解 A-模与代数 A 的 Auslander-Reiten 箭图的点. 映射 $f: X\to Y$ 与 $g: Y\to Z$ 的合成记为 fg.

设 C 是代数 A 的 Auslander-Reiten 箭图的一个直向分支, $X, Y\in C$, 称 $X\leqslant Y$, 如果存在映射链 $X = X_0\xrightarrow{\alpha_0}X_1\xrightarrow{\alpha_1}\cdots\xrightarrow{\alpha_{t-1}}X_t\xrightarrow{\alpha_t}Y$, 其中, α_i 是不可约映射, $1\leqslant i\leqslant t$. C 中一条路 $(X_0\mid \alpha_1, \cdots, \alpha_t\mid X_t)$ 称为 section 路, 如果 $\tau X_{i+1}\neq X_{i-1}$, $1< i< t$, 这里 $\alpha_i: X_{i-1}\to X_i$. 给定点 $X\in\Gamma$, 定义

1) $S(\to X) = \{Y\in C\mid Y\leqslant X$, 且从 Y 到 X 的任意路都是 section$\}$;

2) $S(X\to) = \{Z\in C\mid X\leqslant Z$, 且任意从 X 到 Z 的路都是 section$\}$.

定义 1[1] A 是有限维代数, C 是它的 Auslander-Reiten 箭图的一个分支, U 是 C 中的不可分解模的集合, 满足:

1) 任给 C 中不可分解模 X, 则 U 恰好有一个模在 τ-轨道$\{\tau^z X\mid z\in Z\}$ 中;

2) 若 $X_0\to X_1\to\cdots\to X_r$ 是一个非零映射链, X_i, $i=0, 1, \cdots, r$ 是不可分解模, 则若 $X_0, X_r\in U$, 有 $X_i\in U$, $i=0, 1, \cdots, r$;

3) 没有不可约映射循环图 $U_0\to U_1\to\cdots\to U_r\to U_0$, $U_i\in U$, $i=0, 1, \cdots, r$, $r\geqslant 1$. 则称 U 是一个有限完全切片 (complete slice), $U = \bigoplus_{U(a)\in U} U(a)$ 是对应的切片模(slice module).

本文考虑 Euclidean 型路代数的预投射(预入射)倾斜模. 一个有向箭图 Δ 称为 Euclidean 型, 如果它忘掉箭向后的底图是 A_n、D_n, $n\geqslant 4$ 或 E_n, $n=6, 7, 8$(见图 1). 设 Δ 是 Euclidean 型的有向箭图, 则其路代数 $A = k\Delta$ 称为 Euclidean 型的路代数. 周知, Euclidean 型的路代数上的模分为三类: 预投射模, 正则模, 预入射模. 设箭图 $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1; s, t: \Delta_1\to\Delta_0)$, 这里 Δ_0 是点集, Δ_1 是箭集, s, t 分别表示箭的起点和终点, 即 $s(\rho)\xrightarrow{\rho}t(\rho)$. 设 $|\Delta_0| = n$, 代数 $A = k\Delta$ 的 Euler 型定义为 $\langle\alpha, \beta\rangle = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i - \sum_{\rho\in Q_1}\alpha_{s(\rho)}\beta_{t(\rho)}$, 这里 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)\in N^n$. 设 Δ 是有 $n+1$ 个点的 Eulidean 型箭图, 令 $\delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{n+1})\in N^{n+1}$, 其中 δ_i 为如图 1 所示的点对应的值.

收稿日期: 2001-02-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10071062)

作者简介: 王敏雄(1974—), 男, 硕士.

对 A-模 X, 我们称 $\langle \delta, \underline{\dim} X\rangle$ 为模 X 的亏量, 这里 $\underline{\dim} X$ 是模 X 的维数向量. 下面的定理给出用亏量判定预投射模、正则模、预入射模的方法.

命题 **1**[1]　设 A 是 Eulidean 型路代数, 若 X 是不可分解 A-模, 则

1) $\langle \delta, \underline{\dim} X\rangle < 0$ 时为预投射模; 2) $\langle \delta, \underline{\dim} X\rangle = 0$ 时为正则模; 3) $\langle \delta, \underline{\dim} X\rangle > 0$ 时为预入射模.

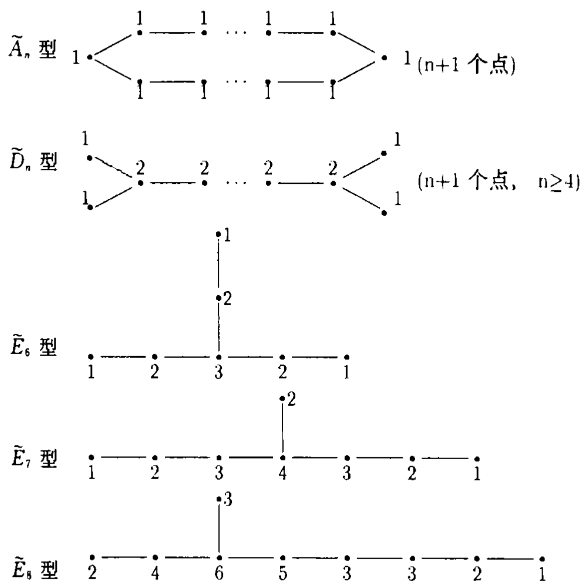

图 1　Dynkin 图

Fig. 1　Dynkin graphs

现在我们回顾倾斜模的概念.

定义 **2**[2]　设 $T_A \in \mathrm{mod}A$, 称 T_A 是倾斜模, 如果满足:

1) $\mathrm{pd}\, T_A \leqslant 1$;

2) $\mathrm{Ext}^1_A(T_A, T_A) = 0$;

3) 存在正合列 $0 \to A_A \to T'_A \to T''_A \to 0$, 其中 T'_A, T''_A 是 T 的直和项的直和.

从 70 年代开始, 倾斜模以及倾斜代数得到深入的研究, 它成为有限维代数表示理论的核心部分之一和表示理论中最重要的技巧之一. 文献[3] 是倾斜理论的综述文章. 完全切片模是一个倾斜模[2]. 路代数上的倾斜模是一个完全切片模当且仅当它是可分倾斜模[4]. 我们知道①: 如果 Dynkin 型路代数的倾斜模 T 的不可分解直和项在不同的 τ 轨道上, 则 T 是一个完全切片模. 本文的主要结果如下.

定理　设 A 是 Eulidean 型路代数. 设 T 是预投射(或预入射)倾斜 A-模. 如果 T 的不可分解直和项在不同的 τ 轨道上, 则 T 是一个完全切片模.

2　定理的证明

由对偶性我们只须讨论 T 是预投射模的情况. 首先我们需要证明几个引理.

设 ω 是 Euclidean 箭图的一个特定的点: 当 $\tilde{\Delta}$ 为 A_n 型时, ω 为任意点; 当 $\tilde{\Delta}$ 为 D_n 型时, ω 是非扩张点; 当 $\tilde{\Delta}$ 为 E_6, E_7, E_8 型时, ω 为 δ 的赋值最大的点.

引理 **1**　$A = k\tilde{\Delta}$, 设 ω 是唯一汇点, 则对任意预投射 A-模 M, 有 $\mathrm{Hom}(P(\omega), M) \neq 0$.

证　设 $\underline{\dim} M = (a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1})$.

当 $\tilde{\Delta}$ 为 A_n 型时, 不妨设唯一汇点 ω 的邻点是 1, n, 唯一源点为 i. 由计算得出, $\langle \delta, \underline{\dim} M\rangle = a_i - a_\omega$. 假设 $\mathrm{Hom}(P(\omega), M) = 0$, 则 $a_\omega = \dim_k \mathrm{Hom}(P(\omega), M) = 0$, 故有 $\langle \delta, \underline{\dim} M\rangle = a_i \geqslant 0$. 则根据命题 1, M 非预投射模, 矛盾.

当 $\tilde{\Delta}$ 为 D_n 型时, 由计算得出, $\langle \delta, \underline{\dim} M\rangle = a_1 + a_2 + a_n + a_{n+1} - 2a_\omega$, 这里 a_1, a_2, a_n, a_{n+1} 是 $\underline{\dim} M$ 在非扩张点的维数分量. 如果 $\mathrm{Hom}(P(\omega), M) = 0$, 则 $a_\omega = 0$. 所以 $\langle \delta, \underline{\dim} M\rangle = a_1 + a_2 + a_n + a_{n+1} \geqslant 0$, 由命题 1 知 M 非预投射模, 矛盾.

当 $\tilde{\Delta}$ 为 E_n ($n = 6, 7, 8$) 型时. 当 $n = 6$ 时, 设 $\underline{\dim} M = (a_1, a_2, \cdots, a_6, a_\omega)$, $\langle \delta, \underline{\dim} M\rangle = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 - 3a_\omega$; 当 $n = 7$ 时, 设 $\underline{\dim} M = (a_1, a_2, \cdots, a_7, a_\omega)$, $\langle \delta, \underline{\dim} M\rangle = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + 2a_7 - 4a_\omega$; 当 $n = 8$ 时, 设 $\underline{\dim} M = (a_1, a_2, \cdots, a_8, a_\omega)$, $\langle \delta, \underline{\dim} M\rangle = 2a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + 3a_8 - 6a_\omega$. 假设 $\mathrm{Hom}(P(\omega), M) = 0$, 则 $a_\omega = 0$. 简单计算可以知道以上情况都有 $\langle \delta, \underline{\dim} M\rangle \geqslant 0$, 则根据命题 1, M 非预投射模, 矛盾.

引理 **2**　设 A 是 Euclidean 型路代数, $X = \tau^{-z} P(\omega)$ (ω 同上, z 为非负整数), M 为不可分解预投射模. 若 $S(X \to) \leqslant M$, 则 $\mathrm{Hom}(X, M) \neq 0$.

证　$S(X \to)$ 为完全切片, 设其对应的完全切片模为 T_A, 则 X 为 T_A 的不可分解直和项. 令 $B = \mathrm{End}(T_A)$, 则函子 $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ 导出 A-模的满子范畴 $\mathscr{T}(T_A)$ 与 B-模的满子范畴 $\mathscr{Y}(T_A)$ 等价. 这里,

$\mathscr{T}(T_A) = \{M_A \mid \mathrm{Ext}^1_A(T, M) = 0\}$, $\mathscr{Y}(T_A) = \{N_B \mid \mathrm{Tor}^B_1(N, T) = 0\}$

在 B-模中, $\mathrm{Hom}(T, X)$ 是唯一汇点所对应的投射模, 由引理 1 知

① 王敏雄, 林亚南: 倾斜模与安全切片模, 待发表.

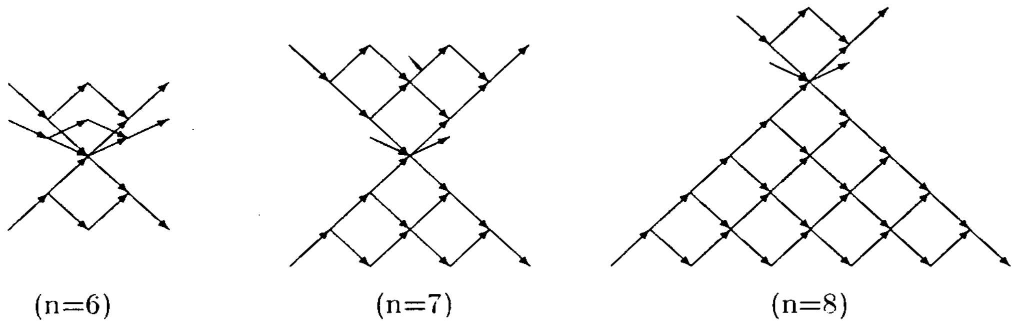

图2 AR-箭图的满子图

Fig.2 The full subquivers of the AR-quivers

$$\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A({}_BT_A, X), \mathrm{Hom}_A({}_BT_A, M)) \neq 0$$

因为 $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A({}_BT_A, X), \mathrm{Hom}_A({}_BT_A, M)) \cong \mathrm{Hom}_A(X, M)$，所以 $\mathrm{Hom}_A(X, M) \neq 0$.

引理3 设 Γ_B 是代数B 的AR-箭图，Γ_A 是线性 A_n 型 Dynkin 图 $\overset{1}{\circ} \to \overset{2}{\circ} \to \overset{3}{\circ} \cdots \to \overset{n}{\circ}$ 的路代数 A 的 AR-箭图. Γ' 是 Γ_B 的连通满子图，Γ'' 是 Γ_A 的连通满子图且包含投射入射模 $P(1)$. 若 $\Gamma' \overset{\Theta}{\cong} \Gamma''$(箭图同构)，$T = \bigoplus_{i=1}^{m} T_i$ 是B-模，$\mathrm{Ext}_B^1(T_i, T_j) = 0$，$T_i$ 在 Θ 下属于$P(i)$ 的 τ-轨道.则对任意的 j，$2 \leqslant j \leqslant m$，$T_j$ 与 T_{j-1} 之间存在不可约映射.

定理的证明：A_n 型、D_n 型情况.

设 $P(i)$，$1 \leqslant i \leqslant n+1$，是全体不可分解投射模，设 T_i 是 T 的不可分解直和项，且与 $P(i)$ 在相同的 τ-轨道上.设 T_{i_0} 为 T 的任一不可分解直和项(但当 A 为D_n 型时，i_0 为非扩张点)，则 $\mathrm{Ext}_A^1(T_i, T_{i_0}) = D\mathrm{Hom}(\tau^{-1}T_{i_0}, T_i) = 0$，$1 \leqslant i \leqslant n+1$.由引理2与对偶命题知 $\tau^{-1}T_{i_0} \leqslant T_i$，且 $T_i \leqslant \tau T_{i_0}$.设与 i_0 相邻的点为 j，由引理3，则 T_j 与 T_{i_0} 有不可约映射.所以 T 为完全切片模.

$E_n(n = 6, 7, 8)$型情况.

由引理2与对偶命题知 $T_i(i = 1, 2, \cdots, n+1)$ 在如下图所示的满子图中，且在不同的 τ-轨道上，根据引理3，知 T 为完全切片模.

参考文献：

[1] Ringel C M. Tame Algebra and Integral Quadratic Forms[M]. Lecture Notes of Mathematics 1099, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, Springer, 1984.

[2] Happel D, Ringel C M. Tilted algebras[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1982, 274: 399—433.

[3] Assem I. Tilting theory-An introduction. Topics in algebra, Part I[C]. Warsaw, Banach Center Publ., 1988, 26: 127—180.

[4] Zhang P. Seperating tilting modules[J], Chinese Science Bull., 1992, 37(12): 1 524—1 526.

Preprojective Tilting Modules over Path Algebras of Euclidean Type and Complete Slice Modules

WANG Min-xiong[1], LIN Ya-nan[2]

(1. Dept. of Math., Huaqiao Univ., Quanzhou 362011, China;
2. Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

Abstract: Let T be a preprojective (preinjective) tilting module over path algebra of Euclidean type. It is proved that if the indecomposable direct summands of T are in diferent τ-orbits, then T is a complete slice module.

Key words: tilting module; path algebra; slice module