数 学 年 刊
22A: 1(2001),71-76.

退缩抛物方程整体解渐近性与轨道有界性***

谭 忠* 刘宪高**

提 要

本文研究形如

$$\begin{cases} u_t-\Delta_p u=|u|^{q-2}u, & (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \\ u(x,0)=u_0(x), & u_0(x)\geq 0, u_0(x)\not\equiv 0 \end{cases}$$

的退缩抛物方程整体解与平衡解之间的关系和轨道在 $W_0^{1,p}(\Omega)$- 中的有界性,这里 $\Delta_p u=\operatorname{div}\Big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big)$, $1<p<N$, $p<q<p^*=\frac{pN}{N-p}$, Ω 是 R^N $(N\geq 3)$ 中具有光滑边界的有界区域.

关键词 退缩抛物方程, 整体解, 渐近性, 有界性
MR (2000) 主题分类 35B40, 35K65, 35K15, 35K22
中图法分类 O175.26 **文献标识码** A
文章编号 1000-8314(2001)01-0071-06

§1. 引 言

本文有两个目的, 第一个目的是研究形如:

$$\begin{cases} u_t-\Delta_p u=|u|^{q-2}u, & (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \\ u(x,0)=u_0(x), & u_0(x)\geq 0, u_0(x)\not\equiv 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

的退缩抛物方程整体解与平衡解之间的关系, 如果用 $u(x,t;u_0)$ 表示初值为 u_0 的整体解 (有时简记为 $u(t)$ 或 u), 那么能证明存在一个时间子列 $\{t_n\}$, 使得 $u(x,t_n;u_0)$ 是平衡方程

$$\begin{cases} -\Delta_p u=|u|^{q-2}u, & x\in\Omega, \\ u(x)>0, & x\in\Omega, \\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

的 (PS) 序列 (定义在下面), 这里 $\Delta_p u=\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $2<p<N$, $p<q<p^*=\frac{pN}{N-p}$, Ω 是 R^N $(N\geq 3)$ 中具有光滑边界的有界区域.

第二个目的是受 Ni, Sacks 和 Tavantzis[1] 的启发, 1984 年, 文 [1] 发现: 当 $p=2$, $q\geq 2^*$ 且 Ω 凸时, (1.1) 存在一个解表现出 "分界线" 的行为, 即它既不整体趋于 0,

本文 1999 年 8 月 30 日收到, 2000 年 9 月 5 日收到修改稿.

*厦门大学数学系, 福建厦门 361005.

**复旦大学数学研究所, 上海 200433.

***国家自然科学基金 (No.10071013), 上海市科学发展基金, 教育部留学回国基金, 福建省自然科学基金和复旦大学非线性科学数学实验室资助的项目.

也不在有限时间破裂，即是一个整体但无界的解．熟知，存在 $u_0(x)$ 的选择，使对应的解当 $t\to+\infty$ 时趋于 0, 也存在其他选择，使对应的解在有限的时间破裂．但当 $p=2$, $2<q<2^*$ 时， Cazenave 和 P. L. Lions[2] 以及 Y. Giga[3] 证明了介于整体解和局部解的“分界线”也是一致有界的整体解，而具有临界 Sobolev 指数的情形与之截然不同．因此, 整体但无界解的特性和判断方程是否具有无界整体解的问题, 引起了人们广泛关注. 1992 年， Fila 在文 [4] 中证明了方程

$$\begin{cases} u_t-\Delta u^m=f(u), & (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\ u(x,0)=u_0(x), & u_0(x)\ge 0, u_0(x)\ne 0,\end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $|f(u)|\le C(1+|u|^q)$, $\overline{m}<\frac{N+2}{N-2}$, 不存在无界整体解，本文将证明当 $p<q<p*$ 时，(1.1) 也不存在无界的整体解，即所有整体解轨道在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中有界.

形如 (1.1) 的方程已得到广泛研究 (见 [5-9]), 他们研究了具有“小”初值时整体解存在性与渐近性．本文研究的适用于 (1.1) 具有“大”初值时的情形.

§2. 记号，定义和主要结果

用 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 表通常的 Sobolev 空间，模为 $\|\nabla u\|_p=\left(\int_\Omega|\nabla u|^pdx\right)^{\frac1p}$, L^q 的模为 $\|\cdot\|_q$. 记 $Q_T=\Omega\times(0,T)$. 用 $\rightharpoonup$ 表示弱收敛， $\to$ 表示强收敛.

定义 2.1 称函数 u 是 (1.1) 的解当且仅当

$$u\in L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)),\quad u_t\in L^2(Q_T)=L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

且在广大意义下满足方程 (1.1).

定义 2.2 整体解 $u(x,t;u_0)$ 的 ω- 极限集为

$$w(u_0)=\{w\in W_0^{1,p}(\Omega)|\exists t_n\to\infty,\quad u(x,t_n;u_0)\rightharpoonup w \text{ 在} W_0^{1,p}(\Omega) \text{ 中}\}.$$

记 (1.1) 的 Lyapunov 函数为

$$J(u)=\frac1p\int_\Omega|\nabla u|^pdx-\frac1q\int_\Omega|u|^qdx.$$

定义 2.3 函数序列 $\{u_n\}$ 被称为平衡方程的 (PS) 序列，如果存在常数 C, 使得 $J(u_n)\le C$, 且在 $W^{-1,p}$ 中有 $-\Delta_pu_n-u_n^{q-1}\to 0,\quad W^{-1,p}$.

本文的主要结果如下

定理 2.1 如果 $u(x,t;u_0)$ 是 (1.1) 的整体解，那么 u 的 ω- 极限集包含了一个平衡解.

定理 2.2 如果 $u(x,t;u_0)$ 是 (1.1) 的整体解，且 $\exists C<+\infty$, 使得 $\|\nabla u\|_p\le C$, 那么 $u(x,t;u_0)$ 的任一子列 $u(x,t_n;u_0)$ 在 $L^q(\Omega)$ 中强收敛于 (1.1) 的一个平衡解 w.

定理 2.3 如果 $u(x,t;u_o)$ 是 (1.1) 的整体解，那么整体轨道在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中有界的，即

$$\sup_{t\ge0}\int_\Omega|\nabla u(x,t;u_0)|^pdx<\infty.$$

注 2.1 上面的结论在较一般的情形也成立，如

$$\begin{cases} u_t-\Delta_pu=f(x,t,u), & (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\ u(x,0)=u_0(x), & u_0(x)\ge 0, u_0(x)\ne 0,\end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $|f(x,t,u)| \le C(1+|u|^{q-1})$, $p<q<p^*$.

§3. 定理 2.1 和定理 2.2 的证明

引理 3.1 如果 $u(x,t;u_0)$ 是整体解, 则对任意的 $t\ge 0$, 有 $J(u(t))>0$.

证 首先证明等价命题: 如果存在 $t_0>0$, 使得 $J(u(t_0))\le 0$, 那么 $u(x,t;u_0)$ 在有限时间破裂.

为此. 用古典的凹方法, 反设 $t_{\max}=\infty$. 令 $f(t)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^t \|u\|_2^2 ds$. 简单计算

$$\int_{t_0}^t\int_\Omega u_t^2 dxds+\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla u|^p dx-\frac{1}{q}\int_\Omega|u|^q dx=J(u(t_0)), \tag{3.1}$$

$$f'(t)=\frac{1}{2}\|u\|_2^2,\quad f''(t)=-\int_\Omega|\nabla u|^p dx+\int_\Omega|u|^q dx. \tag{3.2}$$

由 (3.1), 有

$$\begin{aligned}f''(t)&\ge-\int_\Omega|\nabla u|^p dx+\frac{q}{p}\int_\Omega|\nabla u|^p dx-qJ(u(t_0))+q\int_{t_0}^t\int_\Omega u_t^2dxds\\&=\Big(\frac{q}{p}-1\Big)\int_\Omega|\nabla u|^pdx-qJ(u(t_0))+q\int_{t_0}^t\int_\Omega u_t^2dxds.\end{aligned}\tag{3.3}$$

由假设, $J(u(t_0))\le 0$, 使得对所有的 $t\ge t_0$,

$$\Big(\frac{q}{p}-1\Big)\int_\Omega|\nabla u|^pdx-qJ(u(t_0))>0,$$

如果 $t_{\max}=\infty$, 那么

$$\lim_{t\to\infty}f'(t)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\infty,\quad f''(t)\ge q\int_{t_0}^t\int_\Omega u_t^2dxds,$$

从而

$$\begin{aligned}f(t)f''(t)&\ge\frac{q}{p}\Big(\int_{t_0}^t\|u(s)\|_2^2ds\Big)\Big(\int_{t_0}^t\|u_t(s)\|_2^2ds\Big)\\&\ge\frac{q}{p}\Big(\int_{t_0}^t\int_\Omega uu_tdxds\Big)^2=\frac{q}{p}(f'(t)-f'(t_0))^2,\end{aligned}$$

因此当 $t\to\infty$ 时可以得到对 $\alpha>0$ 和 $\forall t\ge t_0$, 使得 $f(t)f''(t)\ge(1+\alpha)(f'(t))^2$. 由此推出 $f(t)^{-\alpha}$ 是 $[t_0,\infty]$ 上的凹函数. 但 $f(t)^{-\alpha}>0$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)^{-\alpha}=0$. 这个矛盾证明了 $t_{\max}<\infty$. 等价命题成立, 从而引理 3.1 得证.

用上述同样的方法可以证明

推论 3.1 如果当 $t\to t_{\max}$ 时, $\int_\Omega|\nabla u(t)|^pdx\to\infty$, 那么 $t_{\max}(u_0)<\infty$.

定理 2.1 的证明 从现在起, 记 $u(x,t;u_0)$ 为 u, 有

$$\int_0^\infty\int_\Omega u_t^2dxds\le C<\infty,$$

那么存在 $\{t_n\}$ 满足: 当 $t_n\to\infty$ 时,

$$\int_\Omega|u_t(x,t_n;u_0)|^2dx\to 0. \tag{3.4}$$

由引理 3.1, 对所有的 $t\ge 0$, $J(u(t))>0$, 且

$$0<J(u(t))\le J(u_0). \tag{3.5}$$

在 (3.5) 中考虑 $\{t_n\}$, 有

$$0 < J(u(t_n)) \le J(u_0). \tag{3.6}$$

(3.4) 和 (3.6) 的陈述表明 $u_n = u(t_n)$, 当 $t_n \to \infty$ 时, 是平衡问题 (1.2) 的 Palais-Smale 序列. 易证存在 $C < \infty$, 并存在子列 (仍记为 $\{t_n\}$) 和函数 w, 使得在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中 $u_n \rightharpoonup w$, 且在 $L^q(\Omega)$ 中 $u_n \to w$. 由椭圆方程理论得到 w 是 (1.1) 的一个平衡解, 定理 2.1 证毕.

定理 2.2 的证明 对任意 $t_n \to \infty$, 记 $u_n = u(x, t_n; u_0)$, 由有界性知存在子列 (仍记为 $\{u_n\}$) 和函数 w, 使得

$$u_n \rightharpoonup w \quad W_0^{1,p}(\Omega), \quad u_n \to w \quad L^q(\Omega), \quad u_n \to w \quad \text{a.e. } \Omega.$$

为了在 (1.1) 中取极限, 我们固定 $T < \infty$, 类似于 [4], 引进适当的检验函数, 设

$$\psi \in W_0^{1,p}(\Omega), \rho \in C_0^2(0,T), \rho \ge 0, \int_0^T \rho(t)dt = 1.$$

令

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} \rho(t-t_n)\psi(x), & t > t_n, x \in \overline{\Omega}, \\ 0, & 0 \le t \le t_n, x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

由定义 3.1 得

$$\int_{t_n}^{t_n+T} \int_\Omega [u\rho'(t-t_n)\psi - \rho|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\psi + u^q \rho(t-t_n)\psi] dxdt = 0,$$

作变换 $s = t - t_n$ 得

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega [u(t_n+s)\rho'(s)\psi \\ &- \rho|\nabla u(t_n+s)|^{p-2}\nabla u(t_n+s)\nabla\psi + u(t_n+s)^q\rho(s)\psi] dxds = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

注意到 $u(t_n+s)$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中一致有界. 能选择子列 (仍记为 $\{t_n\}$) 和函数 w_s, w, 使得

$$\begin{aligned} u(t_n+s) &\to w_s, \quad L^{q+1}(\Omega), \\ u(t_n) &\to w, \quad L^{q+1}(\Omega). \end{aligned}$$

现在断言: $w_s = w$. 实际上, 由能量不等式, 当 $0 \le s \le T$ 时,

$$\int_\Omega |u(t_n+s) - u(t_n)|^2 dx = s\int_{t_n}^{t_n+s}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|^2 dxd\tau \to 0,$$

因此 $u(t_n+s) - u(t_n) \to 0, \quad L^2(\Omega), t_n \to \infty$, 推出 $w_s = w$. 断言成立.

重写 (3.7) 为

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega [u(t_n)\rho'(s)\psi - \rho|\nabla u(t_n)|^{p-2}\nabla u(t_n)\nabla\psi + u(t_n)^{q-1}\rho(s)\psi] dxds \\ &+ \int_\Omega \int_0^T [u(t_n+s) - u(t_n)]\rho'(s)\psi dxds \\ &- \int_\Omega \int_0^T [|\nabla u(t_n+s)|^{p-2}\nabla u(t_n+s) - |\nabla u(t_n)|^{p-2}\nabla u(t_n)]\nabla\psi dxds \\ &+ \int_\Omega \int_0^T [u(t_n+s)^{q-1} - u(t_n)^{q-1}]\rho(s)\psi dxds = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

由控制收敛定理和 ρ 的选择并注意 $u(t_n)\to w$ (在 $L^q(\Omega)$ 中), 得到当 $n\to\infty$ 时,

$$\int_0^T \rho\Big[\int_\Omega |\nabla u(t_n)|^{p-2}\nabla u(t_n)\nabla\psi dx-\int_\Omega u(t_n)^{q-1}\psi dx\Big]ds=o(1),$$

记 $u(t_n)$ 为 u_n, 再由 ρ 的选择推出当 $n\to\infty$ 时,

$$\int_\Omega |\nabla u(t_n)|^{p-2}\nabla u(t_n)\nabla\psi dx-\int_\Omega u(t_n)^{q-1}\psi dx=o(1).$$

从而完成了定理 2.2 的证明.

§4. 定理 2.3 的证明

我们通过证明一系列引理来完成该定理的证明.

引理 4.1 设 $u(x,t;u_0)$ 是整体解, 那么对每个 $0<A<B$ 存在 $\tau=\tau(A,B)>0$, 如果 $\int_\Omega |u_0|^q dx\le A$, 则当 $t\in[0,\tau]$ 时, 有 $\int_\Omega |u(x,t;u_0)|^q dx\le B$.

证 简记 $u(x,t;u_0)$ 为 u. 设 $S(u_0)=\{t>0,\int_\Omega |u(x,t;u_0)|^q dx=B\}$ 是非空的, 记 $\sigma(u_0)=\inf S(u_0)$, 只需证, 存在 $\tau>0$, 使得对每个满足 $\int_\Omega |u|^q dx\le A$ 的 u_0, 有 $\sigma(u_0)\ge\tau$. 由定义 3.1, 对几乎所有 $t\in(0,\sigma)$, 得到

$$\frac{1}{q}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^q dx=-\frac{(q-1)p^p}{(q+p-2)^p}\int_\Omega \Big|\nabla\Big(u^{\frac{q+p-2}{p}}\Big)\Big|^p dx+\int_\Omega u^{2q-2}dx.$$

应用 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^{2q-2}dx&=\int_\Omega u^{2q-2-\frac{(q-2)N(q+p-2)}{(p-2)N+pq}}\cdot u^{\frac{(q-2)N(q+p-2)}{(p-2)N+pq}}dx\\&\le \|u(t)\|_q^{\theta_1}\|u(t)\|_\gamma^{\theta_2},\end{aligned}\tag{4.1}$$

这里

$$\theta_1=2q-2-\frac{(q-2)N(q+p-2)}{(p-2)N+pq},\quad \theta_2=\frac{(q-2)N(q+p-2)}{(p-2)N+pq},\quad \gamma=\frac{(q+p-2)N}{N-p}.$$

由 $W_0^{1,p}(\Omega)\subset L^{p^*}(\Omega)$ 的连续性

$$\|u(t)\|_\gamma\le C\Big\|\nabla(u^{\frac{q+p-2}{p}})\Big\|^{\frac{p}{q+p-2}},\tag{4.2}$$

因为 $\frac{p\theta_2}{q+p-2}<p$, 结合 (4.1),(4.2) 且用 Young 不等式, 对几乎所有 $t\in(0,\sigma)$, 得到

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^q dx\le C(B).$$

结论由此推出.

引理 4.2 如果 $u(x,t:u_0)$ 是整体解, 且满足

$$\liminf_{t\to\infty}\|u(x,t;u_0)\|_q=k<\infty,$$
$$\limsup_{t\to\infty}\|u(x,t;u_0)\|_q=\infty.$$

那么, 对每个 $B>K$ 存在一个 $w\in\omega(u_0)$, 使得 $\|w\|_q=B$, 且 w 是一个平衡解.

证 选择点列 $\{t_n\}$ 满足 $\int_\Omega |u(x,t_n;u_0)|^q dx=B$. 因为

$$J(u(x,t_n;u_0))\le J(u_0)$$

推出了 $\int_\Omega |\nabla u(x,t;u_0)|^p dx$ 的有界性. 由紧嵌入 $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, 存在子列 (仍记为 $u(x,t_n;u_0)$), 使得在 $L^q(\Omega)$ 中 $u(x,t_n;u_0) \to w$. 为了证明 w 是平衡解, 可以类似于定理 2.2 的证明.

引理 4.3 如果 $u(x,t;u_0)$ 是整体解, 满足 $\omega(u_0) \neq \emptyset$, 且 $w \in \omega(u_0)$, w 是平衡解, 那么存在正常数 K (依赖于 u_0), 使得 $\|\nabla w\|_p \le K$.

证 由能量不等式推出 $J(w) \le J(u_0)$, 因为 w 是平衡解, 则 $\int_\Omega |\nabla w|^p dx = \int_\Omega w^q dx$. 从而 $\int_\Omega |\nabla w|^p dx \le CJ(u_0)$.

定理 2.3 的证明 设 $u(x,t;u_0)$ 是整体解, 反设

$$\limsup_{t\to\infty} \|\nabla u(x,t;u_0)\|_p = \infty,$$

由能量不等式知

$$\limsup_{t\to\infty} \|u(x,t;u_0)\|_q = \infty.$$

如果当 $t \to \infty$ 时, $\|u(x,t;u_0)\|_q \to \infty$, 那么由 Sobolev 嵌入定理, 与推论矛盾. 如果 $\liminf\limits_{t\to\infty} \|u(x,t;u_0)\|_q$ 是有限的, 那么由引理 $3\omega(u_0)$ 包含具有任意大的 L^q- 模的平衡解. 但由 Sobolev 嵌入定理导出了与引理 4.3 矛盾, 定理得证.

参 考 文 献

[1] Ni, W. M., Sacks, P. E. & Tavantzis, J., On the asymptotic behavior of solutions of certain quasilinear equations of parabolic type [J], *J. of Differential Equations*, **54**(1984), 97–120.

[2] Cazenave, T. & Lions, P. L., Solutions globales d'equations de la chaleur semilineaires [J], *Comm. in Partial Differential Equations*, **9**:10(1984), 955–978.

[3] Giga, Y., A bound for global solutions of semilinear heat equations [J], *Commun. Math. Phys.*, **103**(1986), 415–421.

[4] Fila, M., Boundedness of global solutions of nonlinear diffusion equations [J], *J. of Diff. Equ.*, **98**(1992), 226–240.

[5] Tsutsumi, M., Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations [J], *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **8**(1972), 211–229.

[6] Ishii, H., Asymptotic stability and blowing up of solutions of some nonlinear equations [J], *J. of Differential Equations*, **26**(1977), 291–319.

[7] Otani, M., On existence of strong solutions for $(du/dt)(t) - \partial\psi^1(u(t)) - \partial\psi^2(u(t)) \ni f(t)$ [J], *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA*, **24**(1977), 575–605.

[8] Nakao, M., L^p-estimates of solutions of some nonlinear degenerate diffusion equations [J], *J. Math. Soc. Japan*, **37**:1(1985), 23–30.

[9] Nakao, M., Global solutions for some nonlinear parabolic equations with nonmonotonic perturbations [J], *Nonlinear Analysis*, **10**:3(1986), 299-314.