文章编号: 0438-0479(2000)06-0733-04

有界域上 $\bar{\partial}$-方程的具有离散核的解

陈吕萍, 林良裕
(厦门大学数学系, 福建 厦门 361005)

摘要: 利用 Lin Liangyu构造的 C^n 空间上有界域上的局部全纯的离散核及相应的可微分函数的积分表示这一结果, 克服了 $\bar{\partial}$-方程 $\bar{\partial}u = g$ 在一般有界域上不存在具有整体全纯核的积分表示这个困难, 得到有界域上 $\bar{\partial}$-方程的具有离散核的两种不同性质的解及其解的估计.

关键词: 有界域; 离散核; $\bar{\partial}$-方程
中图分类号: O 174.56　　**文献标识码**: A

1969年, Henkin[1]等人开辟了强拟凸域上 $\bar{\partial}$-方程的解及其一致估计的研究. 1973年, Kohn和 Nirenberg[2]证明了在一般有界域上不可能存在域内整体全纯的核的积分表示, 因此, $\bar{\partial}$-方程也不存在整体全纯的解. 1996年, 文献 [3]在一般有界域上构造了一类新的核-局部全纯的离散核, 建立了在有界域上具有离散核的可微分函数和全纯函数的积分表示, 为 $\bar{\partial}$-方程的研究提供了一种新的方法. 本文在文献 [3, 4]的基础上讨论有界域上 $\bar{\partial}$-方程的具有离散核的解, 并获得估计.

1 记号和主要定理

1) $K(\omega)$ 表示有界域 D 上的 ε 点的有限局部全纯核, 简称为离散核. 它在域 D 上的单位分解为 $\{\omega_k\}_{k=1}^n$, 其中

$$H(\zeta, z) = \langle \zeta - z, w \rangle, \quad \omega_k = \frac{w_k(\zeta, z)}{H(\zeta, z)},$$

$$w_k(\zeta, z) = \sum_J \sum_{j \notin J} \chi_{B_J}(z)(\bar{\zeta}_k - \bar{a}_k^j), \quad k = 1, \cdots, n$$

χ_{B_J} 表示 B_J 上的特征函数, 且

$$K(\omega) = C_n \det(\omega, \bar{\partial}_\zeta \omega, \cdots, \bar{\partial}_\zeta \omega) \wedge d\zeta, \quad C_n = (-1)^{n(n-1)/2}(2\pi i)^{-n}.$$

2) $K(H)$ 表示有界域 D 上 ε 点有限局部可微分核. 它的单位分解为

$$\{H_k\}_1^n, \quad H_k = \lambda h_k + (1-\lambda)\omega_k, \quad h_k = (\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k)|\zeta - z|^{-2}, \quad 1 \leqq k \leqq n$$

收稿日期: 2000-04-24
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19771068); 福建省自然科学基金资助项目 (A 9810001)
作者简介: 陈吕萍 (1968-), 女, 硕士生.

且 $K(H)= C_n \det(H, \bar{\partial}_{a,\lambda} H \cdots \bar{\partial}_{a,\lambda} H) \wedge \mathrm{d}a$.

3) $K(h)$ 表示 Bochner-Martinelli核[5]. 且

$$K(h)= C_0 \sum (-1)^{k-1}(\bar{a}_k - \bar{z}_k)|a - z|^{-2n} \mathrm{d}\bar{a}_{[k]} \wedge \mathrm{d}a$$

$$C_0= (n-1)!\,(2ci)^{-n}$$

$\mathrm{d}\bar{a}_{[k]}$ 表示在 $\mathrm{d}\bar{a}$ 中缺去 $\mathrm{d}\bar{a}_k$.

命题 1 由文献 [3]可知, 设 D 是 C^n 中具有 C^1 边界的有界域, 函数 $f \in C^\infty(\bar{D})$, 那么对 $z \in D$,

$$f(z)= \int_{\partial D} f K(Z) - \int_D \bar{\partial} f \wedge K(h) - \int_{\partial D} \bar{\partial} f \wedge \int_0^1 K(H) \tag{1}$$

本文的主要结果是如下两个定理.

定理 1 $D \subset C^n$ 是具有 $C^{(1)}$ 边界的有界域, 且 $g_k \in C^\infty(\bar{D})$, $g(z)= \sum_{k=1}^{n} g_k(z)\,\mathrm{d}\bar{z}_k \in C^{\infty}_{(0,1)}(\bar{D})$ 满足 $\bar{\partial} g = 0$, 则方程 $\bar{\partial} u = g$ 在 D 内有局部可微分的解

$$u(z)= -\int_D g(a) \wedge K(h) - \int_{\partial D} g(a) \wedge \int_0^1 K(H) \tag{2}$$

此外, $u(z)$ 在 D 内具有内闭一致估计, 估计式为 $\| u\| \leqslant C \| g\|$, 其中 $C= C(D^*)$ 是与 D^* 有关的常数, $D^* \subset D$ 是 D 中的任一紧子集.

定理 2 $D \subset C^n$ 是具有 $C^{(1)}$ 边界的有界域, $g(z)= \sum g_k(z)\,\mathrm{d}\bar{z}_k \in C^{\infty}_{(0,1)}(\bar{D})$ 且 g 在 D 内具有紧支集, 则 $\bar{\partial} u = g$ 在 D 内具有可微分整体解:

$$u= -\int_D g(a) \wedge K(h)$$

并且此解在 D 内具有一致估计: $\| u\|_\infty \leqslant C \| g\|_\infty$, 其中 $\| g\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n}\{\sup_D |g|\}$, C 是与点 z 和函数 g 无关的常数.

2 定理的证明

定理 **1**的证明 在式(1)中, 令 $g= \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} \mathrm{d}\bar{a}$, 由题设可知 $\bar{\partial} g = 0$, 因此, 只要对式(1)两端施以 $\bar{\partial}_a$, 由于 $K(Z)$ 是一离散的全纯核, 它仅在 $a \in \partial D$ 至多有 $2n-1$阶的可积奇性, 且 $\bar{\partial}_a K(Z) = 0$, 故式(2)是 $\bar{\partial} u = g$ 的一个局部 C^∞ 的可微分解.

下面让我们来对式(2)的 2个积分进行估计. 首先, 由于 $K(h)$ 核是 B-M 核, 故由 B-M 核的奇性可知

$$\left\| \int_D g(a) \wedge K(h) \right\| \leqslant C_1 \| g\|$$

其中 C_1 是与 z 和 g 无关的常数. 让我们再来估计式(2)右边的第 2个积分, 由于

$$\begin{aligned} K(H) &= C_n \det(H, \bar{\partial}_{a,\lambda} H \cdots \bar{\partial}_{a,\lambda} H) \wedge \mathrm{d}a = \\ &C_n \sum_{k<j} (-1)^{k+j+1}\left(H_k \frac{\partial H_j}{\partial \lambda} - H_j \frac{\partial H_k}{\partial \lambda}\right) \mathrm{d}\lambda \wedge \bar{\partial}_a H_1 \wedge \cdots \wedge [k] \wedge \cdots \wedge \\ &\bar{\partial}_a H_n \wedge \mathrm{d}a + (\text{含 } \partial H_k \text{ 的项和不含 } \mathrm{d}\lambda \text{ 的项}) \end{aligned} \tag{3}$$

$K(H)$ 对 $[0, 1]$上的积分显然有界, 又因为 $\partial H_k \wedge \mathrm{d}a = 0$及在 ∂D 上 $\mathrm{d}\bar{a} \wedge \mathrm{d}\bar{a} = 0$, 可知, 式(3)右边第 2项在式(2)中第 2个积分的积分值为零. 而 $K(H)$ 的展开式有用的项中

$$d\bar{a}_{l_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{a}_{l_{n-2}}\wedge da\wedge d\lambda,\quad 1\leqslant l\leqslant n$$

的系数行列式恰为

$$k = \det(H, H_\lambda, H_{\bar{l}_1}\wedge\cdots\wedge H_{\bar{l}_{n-2}})^T$$

其中, $H_\lambda = \dfrac{\partial H}{\partial\lambda}$, $H_{\bar{l}_k} = \dfrac{\partial H}{\partial \bar{a}_{l_k}}$, $1\leqslant k\leqslant n-2$

由文献 [6]可知,

$$\frac{\partial H_k}{\partial \bar{a}_l} = \frac{\lambda}{|a - z|^2}W_k^l - \lambda\frac{\bar{a}_k - \bar{z}_k}{|a - z|^2}\frac{\partial|a - z|^2}{\partial\bar{a}_l} + \frac{1-\lambda}{H}\frac{\partial w_k}{\partial\bar{a}_l} + (\lambda - 1)\frac{w_k}{H^2}\frac{\partial H}{\partial\bar{a}_l}$$

经一系列的初等变换, 可得

$$k = \det\left(h, \frac{w}{H}, \frac{\lambda\Delta_{l_1}}{|a - z|^2} + \frac{1-\lambda}{H}\Delta_{l_1}, \cdots, \frac{\lambda\Delta_{l_{n-2}}}{|a - z|^2} + \frac{1-\lambda}{H}\Delta_{l_{n-2}}\right)^T$$

其中, $\Delta_{l_k} = (W_{l_k}^1, \cdots, W_{l_k}^n)^T$, W是 Kronecker符号, $1\leqslant l_k\leqslant n$. $g\wedge K(H)$的展开式中关于 λ的次数为 1, 关于 a的外微分次数为 $2n-1$项, $g\wedge K(H)$的展开式中有用的项关于 $z = a\in\partial D$ 的奇性至多为 $2n-2$阶. 因此, 可通过估计当 $z\in D$ 沿边界 ∂D 的内法线或某个超球域的径向 $\overline{a^j a}$ 趋于 $a\in\partial D\cap B_j(a^j)$时积分收敛的状况, 来实现对式 (2)中右边第 2项积分的估计. 对任一紧集 $D^*\subset D$, 我们总可以选择有限个点 $a^k\in D$ 和有限个包含于 D 内的超球 $B_{jk}(a^k)$ 使 $D^*\subseteq\bigcup_{k=1}^{l}B_{jk}(a^k)$, 现在仅对 $z\in D^*$ 进行估计. 由于

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\to a}\left|\iint_{\partial D}\int_0^1 k\, d\bar{a}_{l_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{a}_{l_{n-2}}\wedge da\wedge d\lambda\right|\leqslant \\
&\lim_{z\to a}\int_{\partial D}\int_0^1 |k|\,|d\bar{a}_{l_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{a}_{l_{n-2}}\wedge da\wedge d\lambda|\leqslant \\
&\lim_{z\to a}\left|\int_{\sum_W(a)}\right| + \lim_{z\to a}\left|\int_{e_W(a)}\right| = \lim_{W\to 0}(|R_1| + |R_2|)
\end{aligned}$$

其中 $e_a(a) = \partial D\cap B_W(a)$, $\sum_W(a) = \partial D - e_W(a)$, $a\in\partial D$, $|R_1|\leqslant +\infty$, $|R_2|\leqslant m\int_{e_W(a)}|a - Y|^{2-2n}e(da) = 0(W)$, 因此, 上面积分当 $z\to a\in\partial D$ 极限存在. 且极限与 z 趋于 a的路径无关, 因此 $\|\int_{\partial D}g(a)\wedge\int_0^1 K(H)\|\leqslant C_2\|g\|$, 从而有

$$\|u\|\leqslant C_1\|g\| + C_2\|g\| = C\|g\| \tag{4}$$

其中 $C = C(D^*)$ 是与点 $z\in D^*\subset D$ 和 g无关的常数, 因此, 式 (4) 就是我们得到的估计式.

定理 2的证明　　若 g在 D 内具有紧支集, 那么在边界 ∂D 上, $\int_{\partial D}g(a) = 0$, 因此式 (2)的第 2项为零, 故

$$u = -\int_D g(a)\wedge K(h)$$

是 $\bar{\partial}$-方程的解. 由此可知 u 在 D 上具有一致估计:

$$\|u\|_\infty\leqslant C\|g\|_\infty$$

其中 C是与 z和 g无关的常数.

定理证毕.

参考文献:

[1] Henkin G M. Intergral representations of functions holomorphic in strictly Speudoconvex domains and some applications[J]. Mat Sb. 1969, 78(120): 611-632.

[2] Kohn J J, Nirenberg L. A pseudoconvex domain not admitting a holomorphic support function[J]. Math. Ann. 1973, 201: 265-268.

[3] Lin Liangyu. Bochner-Martinelli formula with discrete holomorphic kernel[J]. Chinese Science Bulletin. 1997, 42(6): 447-450. (中文版 1996, 41(24): 2222-2224)

[4] 林良裕. 圆型堆垒域上具有有限离散核的积分表示及其应用[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 1997, 36(2): 171-174.

[5] 钟同德, 黄沙. 多元复分析[M]. 石家庄, 河北教育出版社, 1990.

[6] 林良裕. C^n 中光滑拟凸域上 $\bar\partial$ 方程的局部解[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 1995, 34(5): 680-687.

Solutions with Discrete Kernels for $\bar\partial$-Equation on Bounded Domains

CHEN Lü-ping　LIN Liang-yu

(Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen, 361005 China)

Abstract The difficulty that there don't exist global solutions to $\bar\partial$-equation on a general bounded domain is overcome. The following result is obtained: Let D be a bounded domain in C^n, $\partial D \in C^{(1)}$, $g \in C^{(\infty)}_{0,1}(\bar D)$ such that $\bar\partial g = 0$, then there exists a local differential solution of equation $\bar\partial u = g$, in D which is $u = -\int_D g(a) \wedge K(h) - \int_{\partial D} g(a) \wedge \int_0^1 K(H)$ and u has an inner closed uniform estimate in D, i.e. $\| u\| \leqslant C\| g\|$ where $K(h)$ and $\Omega(H)$ are Bochner-Martinelli kernel and discrete kernel respectively.

Key words bounded domain; discrete kernel; $\bar\partial$-equation