中 国 科 学(A 辑)
第30卷 第11期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 2000年11月

半线性抛物方程的集中现象*

谭 忠
(厦门大学数学系, 厦门 361005)

摘要 证明了具有临界 Sobolev 增长指数的半线性抛物方程在一定的条件下存在一个整体无界的古典解, 该解当时间趋于无穷时在原点产生集中现象.

关键词 半线性抛物方程 临界 **Sobolev** 指数 存在性 渐近性 集中紧致原理

本文研究形如

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^p, & (x,t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x,0) = u_0(x), & u_0(x) \geqslant 0, \ u_0(x) \not\equiv 0 \end{cases} \tag{1}$$

的半线性抛物方程长时间解的渐近性, 这里 $p = 2^* - 1 = \dfrac{N+2}{N-2}$, $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$称为临界 Sobolev 指数. Ω 是$\mathbf{R}^N (N \geqslant 3)$中的单位球.

形如(1)式的非线性抛物方程是在各种物理和化学问题中提出的, 如对反应扩散过程的描述等. 自 60 年代 Fujita[1] 的开创性工作以来, 许多作者研究了方程(1)的整体解的存在性和渐近性. 熟知, 存在对初值 u_0 的选择, 使其对应的整体解当 $t \to \infty$时趋于 0, 也存在对 u_0 的其他选择, 使其对应的解在有限时间破裂(blowup). 1984 年, Ni 等人[2] 证明了: 如果 $1 < p \leqslant (N+2)/N$ 且 Ω 凸, 则方程(1)的整体解是一致有界的. 该结果被 Cazenave 和 Lions[3] 推广为 $p > 1$ $(N = 1, 2)$或 $1 < p < (N+2)/(N-2)$ $(N \geqslant 3)$且没有区域凸性和 u_0 符号的限制的情形. 在 p 的同样假设下, Giga[4] 利用 u_0 的最大模, 导出了整体解的先验界. 但是, 当 $p \geqslant \dfrac{N+2}{N-2}$且 Ω 凸时, Ni 等人[2] 发现方程(1)的一个解表现出"分界线" 的行为, 即: 它既不整体趋于 0, 也不在有限时间破裂, 是一个整体但无界的解. 这个解的性质一直是人们关注的问题. 1997 年, Galaktionov 和 Vazquez[5] 在$\mathbf{R}^N$ 的球域上证明了这个无界的整体解实际上是整体的古典解. 本文精确描述这个无界的整体解的渐近行为, 证明了这个整体无界的古典解当时间趋于无穷时在原点产生集中现象. 即: 存在时间点列 $t_n \to \infty$和正整数 k, 使得当 $t_n \to \infty$时, 在测度意义下,

$$|\nabla u(t_n)|^2 \rightharpoonup k S^{N/2} \delta_0, \quad |u(t_n)|^{2^*} \rightharpoonup k S^{N/2} \delta_0,$$

这里 δ_{x_0}是 x_0 点的 Dirac 测度, S 是 Sobolev 嵌入 $H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$的最佳常数, 定义为

1999-08-09收稿, 2000-05-25 收修改稿

*国家自然科学基金(批准号: 19971070)和复旦大学非线性科学数学实验室及教育部留学回国基金资助项目

$$S=\inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ \|u\|_{2^*}=1}}\|\Delta u\|_2^2,$$

这里 $H_0^1(\Omega)$表示通常的Sobolev 空间,其模为 $\|\Delta u\|_2=\left(\int_\Omega|\Delta u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$，其对偶空间为 H^{-1}. L^q 的模为 $\|\circ\|_q$. 记 $Q_T=\Omega\times(0,T)$.

这种集中现象类似于当 $\varepsilon\to0$ 时,下面椭圆方程解 u_ε 的渐近行为:

$$\begin{cases}-\Delta u_\varepsilon=u_\varepsilon^{p-\varepsilon}, & x\in\Omega,\\ u_\varepsilon>0, & x\in\Omega,\\ u_\varepsilon=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{2}$$

和

$$\begin{cases}-\Delta u_\varepsilon=u_\varepsilon^{p}+\varepsilon u_\varepsilon, & x\in\Omega,\\ u_\varepsilon>0 & x\in\Omega,\\ u_\varepsilon=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{3}$$

如 Rey[6] 和 Wei[7] 证明了在一定假设下,方程(2)和(3)的解 u_ε 在某点集中.

本文的方法是受文献[8,9] 的集中紧致原理的启发,证明了存在时间点列$\{t_n\}$,使得 $u(t_n)$ 是方程(1)的平衡方程的(PS)序列,因而可以证明 $J'(u_n)\to0$ 仅在有限个点上有奇异行为.这一思想源于Sacks 和Uhlenbeck[10] 的工作,后被许多作者应用到各种问题,如文献[8,9,11,12] 等.

1　预备知识

本节回顾几个熟知的引理．首先考虑具有临界Sobolev 指数的半线性椭圆方程

$$\begin{cases}-\Delta u=u^{2^*-1}, & x\in\Omega,\\ u>0, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{4}$$

这里 Ω 是$\mathrm{R}^N(N\geqslant3)$中的单位球,由 Pohozaev[13] 的理论,方程(4)不存在任何古典解;再由 Gidas 等人[14] 的理论,方程(4)不存在任何奇异解. 因此有

引理 1　问题(4)没有任何古典解和奇异解.

引理 2　设 S 是 Sobolev 嵌入 $H_0^1(\Omega)\subset L^{2^*}(\Omega)$的最佳常数,那么

(a) S 与Ω无关,只依赖于 N,

(b) 当 Ω 有界时,S 不被任何函数达到,

(c) 当 $\Omega=\mathrm{R}^N$ 时,S 被函数

$$U(x)=-\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}\tag{5}$$

达到,这里 $aU(a=(N(N-2))^{(N-2)/4})$满足方程

$$-\Delta(aU)=(aU)^p,\ x\in\mathrm{R}^N.\tag{6}$$

下面是 Lions 的集中紧致原理,证明见文献[8,9].

引理 **3** 设$\{u_n\}$满足

$$\begin{cases} -\Delta u_n = u_n^{2^*-1} + f_n, & x \in \Omega, \\ J(u_n) \to c, \end{cases}$$

这里f_n在$H^{-1}(\Omega)$中强收敛于f. 从而, $\{u_n\}$是$H_0^1(\Omega)$中的有界序列, 弱收敛于w, 使得

(a) $\{|\Delta u_n|^2\}$ 弱收敛于非负测度 μ,

(b) $\{|u_n|^{2^*}\}$ 弱收敛于非负测度 ν,

那么

(ⅰ) w 是方程

$$-\Delta w = w^{2^*-1} + f,\ x \in \Omega,\ w \in H_0^1(\Omega)$$

的解, 并且存在一个有限点集$\{x_1, \cdots, x_k\} \subset \Omega$和有限个数$\{\mu_1, \cdots, \mu_k\} \subset (0, +\infty)$, 使得

(ⅱ) $\mu = |\Delta w|^2 + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \delta_{x_j}$,

(ⅲ) $\nu = |w|^{2^*} + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \delta_{x_j}$,

(ⅳ) $S\nu_j^{2/2^*} \leqslant \mu_j,\ j = 1, \cdots, k$,

(ⅴ) $c = J(w) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k} \mu_j$,

这里 S 是最佳常数, δ_{x_j}是x_j 点的 Dirac 测度.

2 存在性和渐近性

本节证明或回顾一系列关于方程(1)整体解的存在性和渐近性的结果. 首先给出某些定义和记号.

定义 **1** 称函数 u 是方程(1)的 L^1-解, 如果 $u \in C([0, T]; L^1(\Omega)) \cap L^p(\Omega \times (0, T))$, 且对每个 $\psi \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$(当 $x \in \partial\Omega$ 时, $\psi(x, t) = 0$), 以及 $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T < \infty$, 都有

$$\int_\Omega u(x, t)\psi(x, t)\mathrm{d}x \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} = \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega [\psi_t u + u\Delta\psi + \psi|u|^{2^*-2}u]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s.$$

记方程(1)的 Lyapunov 函数为

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*}\mathrm{d}x.$$

熟知, 当 u_0 充分小时, 方程(1)存在惟一的整体解 $u(x, t; u_0)$, 当 $t \to \infty$时一致收敛于 0. 记

$$K = \{u_0(|x|) \in L^\infty(\Omega);\ u_0 \geqslant 0,\ u_0 \not\equiv 0, \text{存在整体解 } u(x, t; u_0),$$
$$\text{使得当 } t \to \infty \text{ 时}, u(x, t; u_0) \text{ 在 } L^\infty(\Omega) \text{ 中一致收敛于 } 0\}.$$

类似于文献[2] 的证明可得

引理 **4** K 在$L^\infty(\Omega) \cap \{u_0 \geqslant 0\}$中是相对开的.

现设 λ_1 和 φ_1 是$-\Delta$ 在 Ω 中具有零边值的第一特征值和特征函数, 那么, $\varphi_1 \geqslant 0$, 取

$\int_{\Omega}\varphi_1 dx = 1$，类似于文献[2]的一个简单计算有

引理 **5**　如果 u 是方程(1)的整体解，那么

$$\int_{\Omega} u(x,t)\varphi_1(x)dx \leqslant \lambda_1^{1/(2^*-2)}. \tag{7}$$

引理 **6**　设 $0\leqslant u_0(x)=u_0(|x|)\in L^{\infty}(\Omega)$，$u_0\not\equiv 0$. 简记 $u(x,t;\tau u_0)$为 u_τ. 定义

$$\tau_0=\sup\{\tau\in \mathrm{R}^+: u_\tau \text{ 整体存在，且当 } t\to\infty \text{ 时，} u_\tau \text{ 一致收敛于 } 0\},$$

那么方程(1)存在一个整体弱解 u_{τ_0}不是一致有界的.

证　类似于文献[2]的方法. 由引理 4 和 5，$A=\{\tau>0;\ \tau u_0\in K\}$是有界开区间；$A=(0,\tau_0)$且 $\tau_0<\infty$. 由极大值原理并注意到当 $\tau_1<\tau_2$ 时，$\tau_1 u_0<\tau_2 u_0$，因此 $u_{\tau_1}<u_{\tau_2}$，u_τ 是关于 τ 递增的. 取 $\tau<\tau_0$，由移动平面法，存在正整数 m，有

$$\int_{\Omega} u_\tau(x,t)dx \leqslant (m+1)\int_{\Omega_0} u_\tau(x,t)dx \leqslant \frac{m+1}{a_0}\int_{\Omega} u_\tau(x,t)\varphi_1(x)dx \leqslant \frac{m+1}{a_0}C_0, \tag{8}$$

这里 $a_0=\inf\limits_{x\in\Omega_0}\varphi_1(x)$，$\overline{\Omega_0}\subset\Omega$，$C_0$ 由引理 5 决定.

另一方面，记 u^{2^*-1}为 $f(u)$，有

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_{\Omega} f(u_\tau(x,s))dxds &\leqslant (m+1)\int_0^t\int_{\Omega_0} f(u_\tau(x,s))dxds\\ &\leqslant \frac{m+1}{a_0}\int_0^t\int_{\Omega} f(u_\tau(x,s))\varphi_1(x)dxds.\end{aligned} \tag{9}$$

回顾每个 u_τ 关于 $t>0$ 是古典的. 用 φ_1 乘方程(1)并在 $\Omega\times(0,t)$上积分，得

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_{\Omega} f(u_\tau(x,s))\varphi_1(x)dxds\\ &\leqslant \int_{\Omega} u_\tau(x,t)\varphi_1(x)dx + \lambda_1\int_0^t\int_{\Omega} u_\tau(x,s)\varphi_1(x)dxds \leqslant C_0(1+\lambda_1 t).\end{aligned} \tag{10}$$

因此，结合(9)和(10)式，得到

$$\int_0^t\int_{\Omega} f(u_\tau(x,s))dxds \leqslant \frac{(m+1)C_0}{a_0}(1+\lambda_1 t),$$

由此结合单调收敛定理，立即推出

$$\lim_{\tau\to\tau_0} u_\tau(x,t) = u^*(x,t),\ \text{a.e. } x\in\Omega,\ t\geqslant 0, \tag{11}$$

$$\lim_{\tau\to\tau_0} f(u_\tau(x,t)) = f(u^*(x,t)),\ \text{a.e. } x\in\Omega,\ t\geqslant 0, \tag{12}$$

$$\lim_{\tau\to\tau_0}\int_{\Omega} u_\tau(x,t)dx = \int_{\Omega} u^*(x,t)dx \leqslant C, \tag{13}$$

$$\lim_{\tau\to\tau_0}\int_0^t\int_{\Omega} f(u_\tau(x,s))dxds = \int_0^t\int_{\Omega} f(u^*(x,s))dxds \leqslant C(1+\lambda_1 t), \tag{14}$$

这里 C 不依赖于 τ.

在定义 1 中，用 u_τ 代替 u，并令 $\tau\to\tau_0$，由控制收敛定理，对所有 $0\leqslant t_1<t_2\leqslant T$，$T\in(0,\infty)$，

$$\int_{\Omega} u^{*}(x,t)\psi(x,t)\mathrm{d}x\Big|_{t=t_1}^{t=t_2}=\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\left[\psi_t u^{*}+u^{*}\Delta\psi+\psi\,|u^{*}|^{2^{*}-2}u^{*}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}s.$$

进一步,由(13)式推出 $u^{*}\in L^{\infty}([0,\infty];L^{1}(\Omega))$,由(14)式推出对任意 $T>0$,有 $f(u^{*})\in L^{1}(Q_T)$. 为了证明 u^{*} 是方程(1)的 L^1-整体解且具有初值 $u(x,0)=\tau_0 u_0(|x|)$,必须证明对任意的 $T>0$,有 $u^{*}\in C([0,T];L^{1}(\Omega))$. 现在证明映射 $t\to u^{*}(x,t)\in L^{1}(\Omega)$ 关于 $t\in[0,T]$ 连续. 由半群理论,设 $\bar{u}$ 是方程

$$\begin{cases}\bar{u}_t-\Delta\bar{u}=(u^{*})^{2^{*}-1}, & (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ \bar{u}=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\ \bar{u}(x,0)=\tau_0u_0(x), & u_0(x)\geqslant 0,\ u_0(x)\not\equiv 0\end{cases}\tag{15}$$

的解,这里 u^{*} 是(11)式中的 u_τ 的极限函数.

设 A_1 是 $-\Delta$ 在 $L^1(\Omega)$ 上的闭包,那么 A_1 是强连续半群 $S(t)$ 在 $L^1(\Omega)$ 内的生成元. 因为 $f(u^{*})\in L^1(\Omega)$,故问题(15)有惟一解

$$\bar{u}(x,t)=S_1(t)\tau_0u_0+\int_0^t S_1(t-s)(u^{*})^{2^{*}-1}\mathrm{d}s,$$

且 $\bar{u}\in C([0,T];L^1(\Omega))$.

另一方面,

$$\|\bar{u}(\circ,t)-u_\tau(\circ,t)\|_1\leqslant(\tau_0-\tau)\|u_0\|_1+\int_0^t\|f(\bar{u}(\circ,t))-f(u_\tau(\circ,t))\|_1\mathrm{d}s,$$

这里 $0\leqslant t\leqslant T$. 取极限 $\tau\to\tau_0$,得到 $u_\tau\to\bar{u}$ 且在 L^1 意义下 $\bar{u}=u^{*}$,由此证明了 $u^{*}\in C([0,T];L^1(\Omega))$.

最后,证明 u^{*} 是无界的. 实际上,假设 u^{*} 是一致有界的,那么,当 $t\to\infty$ 时 u^{*} 趋于方程(1)的平衡解. 但由 Ω 的凸性和引理 1 推出 $w=0$,那么 $\tau_0u_0\in K$,这与引理 4 矛盾. 引理得证.

现在描述这个无界整体解渐近性的第一个特征.

定理 1 设引理 6 条件成立,那么

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to\infty}u_{\tau_0}(x,t)=0, & x\neq 0,\\ \lim\limits_{t\to\infty}u_{\tau_0}(x,t)=\infty, & x=0.\end{cases}\tag{16}$$

证 应用文献[15]的方法. 设当 $\tau_n\to\tau_0$ 时,$u_{\tau_0}(x,t)\uparrow u_{\tau_0}(x,t)$. 简记 $u_{\tau_n}(x,t)$ 为 u_n,$u_{\tau_0}(x,t)$ 为 u. u_n 是方程(1)的整体古典解. 可设 $u_0\in C_0^1(\bar{\Omega})$. 由文献[16]的定理 1,存在不依赖于 n 的 $T^{*}<\infty$,使得当 $t\geqslant T^{*}$ 时,$\dfrac{\mathrm{d}u_n(r,t)}{\mathrm{d}r}\leqslant 0$. 这对 u 也成立. 由引理 5 和 6,有

$$\int_{\Omega}u(x,t)\varphi_1\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}u_n(x,t)\varphi_1\mathrm{d}x\leqslant\lambda_1^{1/(2^{*}-2)},$$

$$\int_{\Omega}u(x,t)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}u_n(x,t)\mathrm{d}x\leqslant C_0,$$

$$u(x,t)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,t)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{C}{r^N}\int_{|y|<r}u_n(y,t)\mathrm{d}y\leqslant\frac{C_0}{r^N}.$$

现在断言：当 $t\to\infty$ 时，对任意 $r>0$，$u_t(x,t)$ 在 $L^2(\Omega_r)$ 中强收敛于 0，这里 $\Omega_r=\{x\in\Omega: r<|x|<1\}$．为此，用 u_t 乘方程(1)并积分得

$$\int_0^t\int_\Omega u_{nt}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+J(u_n(t))=J(u_{n0}),$$

$$\int_0^t\int_\Omega u_{nt}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C,$$

由下半连续得

$$\int_0^t\int_\Omega u_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C.$$

由标准的抛物方程正则性理论知，u 是在 $\Omega_{r/2}\times(0,\infty)$ 上一致有界的，从而对任意的 $r>0$，$\alpha\in(0,1)$，得到 u，u_t，u_{x_i}，$u_{x_ix_j}$ 在 $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega_r}\times(0,\infty))$ 上的界，这里 $C^{\alpha,\alpha/2}$ 表示 Hölder 连续空间．因此，u_t 是一致连续的，一定对所有 $x\in\Omega_r$，当 $t\to\infty$ 时，$u_t(x,t)\to 0$.

为了证明(16)式的第 1 式，只需证：如果 $t_n\to\infty$，那么存在子列 $t_{n_k}\to\infty$，使得当 $x\neq 0$ 时，$u(x,t_{n_k})$ 强收敛于 0．为此，设 $t_n\to\infty$．首先，$\{u(\circ,t_n)\}$ 是在 $C^{2+\alpha}(\Omega_r)$ 中对任意固定的 $r>0$ 和 $\alpha\in(0,1)$ 一致有界的．存在子列 $t_{n_k}\to\infty$ 和 $w\in C^2(\Omega_r)$，使得在 $C^2(\Omega_r)$ 内，$u(\circ,t_{n_k})\to w$．进一步，因为在 $L^2(\Omega_r)$ 内，$u_t(\circ,t_{n_k})\to 0$，因此 w 满足

$$\Delta w+w^p=0,\quad x\in\Omega_r.$$

由对角线法，进一步有子列，仍记为 t_{n_k}，和 $w\in C^2(\Omega-\{0\})$，使得

$$\Delta w+w^p=0,\quad x\in\Omega-\{0\},$$

且当 $x\neq 0$ 时，$u(x,t_{n_k})\to w(x)$．显然 w 满足边界条件 $w(x)=0$.

如果 $w\notin L^\infty(\Omega)$，那么 w 是方程(4)的径向对称的奇异解，这与引理 1 矛盾．所以，$w\in L^\infty(\Omega)$．由椭圆正则性理论，方程(4)的解均为古典解．但由 Pohozaev[13] 的理论推出 $w=0$．(16)式的第 1 式得证．

由文献[5] 知 u_{τ_0} 是古典解，因此易得(16)式的第 2 式．

3　集中现象

现在描述无界整体解的第 2 个特征，即集中现象．

引理 **7**　如果 u 是整体解，那么对所有的 $t\geqslant 0$，$J(u(t))>0$.

应用古典的凹方法可以证明等价命题：如果存在 $t_0>0$，使得 $J(u(t_0))\leqslant 0$，那么 u 在有限时间破裂．

证明是简单的，故略去．

结合定理 1 和上述各引理可得

定理 **2**　设 Ω 是 $\mathrm{R}^N(N\geqslant 3)$ 中的单位球．那么，对任意的 $0\leqslant u_0(x)=u_0(|x|)\in L^\infty(\Omega)$，$u_0\not\equiv 0$，存在正常数 τ_0，τ_1，使得

(ⅰ) 如果 $0<\tau<\tau_0$，那么存在整体解 $u(x,t;\tau u_0)$，当 $t\to\infty$ 时，一致地有 $u(t)\to 0$.

(ⅱ) 存在整体解 $u(x,t;\tau_0u_0)$，对某时间序列趋于无穷时在原点集中．即：存在时间点列 $t_n\to\infty$ 和正整数 k，在测度意义下有

$$|\Delta u(t_n)|^2 \rightharpoonup kS^{N/2}\delta_0, \quad |u(t_n)|^{2^*} \rightharpoonup kS^{N/2}\delta_0,$$

这里 δ_0 是原点的 Dirac 测度.

(ⅲ) 如果 $\tau > \tau_1$, 那么局部解在有限时间破裂.

证　从现在起, 简记 $u(x, t; \tau_0 u_0)$ 为 u, 有

$$\int_0^\infty \int_\Omega u_t^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s \leqslant C < \infty,$$

那么存在 $\{t_n\}$, 满足当 $n \to \infty$ 时, $t_n \to \infty$ 且

$$\int_\Omega |u_t(x, t_n; \tau_0 u_0)|^2 \mathrm{d}x \to 0. \tag{17}$$

简记 $u(x, t_n; \tau_0 u_0)$ 为 u_n. 由引理 8, 对所有的 $t \geqslant 0$, $J(u(t)) > 0$, 且

$$0 < J(u(t)) \leqslant J(\tau_0 u_0). \tag{18}$$

在(18)式中考虑 $\{t_n\}$, 有

$$0 < J(u(t_n)) \leqslant J(\tau_0 u_0). \tag{19}$$

(17)和(19)式的陈述表明 $u_n = u(t_n)$, 当 $t_n \to \infty$ 时, 是平衡问题(4)的 Palais-Smale 序列. 这个序列在椭圆方程理论中得到了充分的研究. $\{u_n\}$ 的渐近性能利用集中紧致原理来精确刻画. 由引理 1 知 $w = 0$, 且由定理 1 知引理 3 中的 $x_1 = \cdots = x_k = 0$. 因此由引理 3 知

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = c \geqslant \frac{k}{N}S^{N/2}, \quad -\Delta u_n - u_n^{2^*-1} \to 0 \text{ 在 } H^{-1} \text{ 中}.$$

为了证明 $c = \frac{k}{N}S^{N/2}$, 应用 blowup 技巧[4, 8~11] 来分析 u_n 的奇异行为. 存在 $\{x_n\} \subset \Omega$ 和序列 $\varepsilon_n \to 0$, 使得

$$\int_{B(x_n, \varepsilon_n)} |\Delta u_n|^2 \mathrm{d}x = \nu,$$

这里 ν 充分小. 设

$$v_n(x) = \varepsilon_n^{(N-2)/2} u_n(\varepsilon_n x + x_n), \quad x \in \mathrm{R}^N,$$

u_n 在 Ω 外扩展为 0, $v_n(x)$ 满足

$$\int_{B(0,1)} |\Delta v_n|^2 = \nu, \quad \int_{\mathrm{R}^N} |\Delta v_n|^2 \leqslant C,$$

这里 C 是常数, 且

$$\varepsilon_n^{(N+2)/2} u_{nt} - \Delta v_n = v_n^p, \quad x \in \frac{\Omega - x_n}{\varepsilon_n}.$$

注意到在 $H^{-1}(\Omega)$ 中, $\varepsilon_n^{(N+2)/2} u_{nt}$ 强收敛于 0. 现对 v_n(或子列)取极限, 得到在 $L_{\mathrm{loc}}^{p+1}(\mathrm{R}^N)$ 中, v_n 强收敛于 w, 在 $L_{\mathrm{loc}}^2(\mathrm{R}^N)$ 中, Δv_n 强收敛于 Δw, 推出

$$-\Delta w = (w^+)^p, \quad x \in \mathrm{R}^N,$$

且 $w \neq 0$. 为去掉第 1 个奇性, 设 $h_n(x) = u_n(x) - \frac{1}{\varepsilon_n^{(N-2)/2}} w\left(\frac{x - x_n}{\varepsilon_n}\right)$. $h_n(x)$ 满足 $J(h_n) \to c - \frac{1}{N}S^{N/2}$, 且 $-\Delta h_n - h_n^p \to 0$. 如果用 $c - \frac{1}{N}S^{N/2}$ 代表 c, $h_n(x)$ 和 $u_n(x)$ 均是平衡方程的(PS)序列, 再次迭代序列 $\{h_n\}$, 通过 k 次迭代, 得到序列 $\{w_n\}$, 使得

$$J(w_n)\to c-\frac{k}{N}S^{N/2}<\frac{1}{N}S^{N/2},\quad -\Delta w_n-w_n^p\to 0.$$

由引理 1 知 c 只能等于 $\frac{k}{N}S^{N/2}$．且每个奇性具有相同的能量 $\frac{1}{N}S^{N/2}$，同时对一切的 $j=1,\cdots,k$ 均有 $\mu_j=S^{N/2}$．于是由引理 3，当 $t_n\to\infty$ 时，在测度意义下，

$$|\Delta u(t_n)|^2\rightharpoonup kS^{N/2}\delta_0$$

和

$$|u(t_n)|^{2^*}\rightharpoonup kS^{N/2}\delta_0.$$

定理 2 的(ⅱ)得证．定理 2 的(ⅰ)和(ⅲ)是显然的．

注　猜测在定理 2 中有 $\tau_0=\tau_1$ 和 $k=1$．

致谢　衷心感谢 Y．Giga 教授的鼓励和有益的讨论．

参　考　文　献

1 Fujita H．On the blowing up of solutions of the Chauch problem for $u_t=\Delta u+u^{1+\alpha}$．J Fac Sci Univ Tokyo Sect I，1966，13：109～124

2 Ni W-M，Sacks P E，Tavantzis J．On the asymptotic behavior of solutions of certain quasilinear equations of parabolic type．J Differential Equations，1984，54：97～120

3 Cazenave T，Lions P L．Solutions globales d' equations de la chaleur semilineaires．Comm in Partial Differential Equations．1984，9(10)：955～978

4 Giga Y．A bound for global solutions of semilinear heat equations．Commun Math Phys，1986，103：415～421

5 Galaktionov V，Vazquez J L．Continuation of blow-up solutions of nonlinear heat equations in several space dimensions．Comm Pure Appl Math，1997，50：1～67

6 Rey O．The role of the Green' s function in a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent．J Func Anal，1990，89：1～52

7 Wei Juncheng．Asymptotic behavior of least energy solution to a semilinear Dirichlet problem near the critical exponent．J Math Soc Japan，1998，50(1)：139～153

8 Lions P L．The concentration-compactness principle in the calculus of variations，The limit case 1．Rev Mat Iberoamerioana，1985，1：45～121

9 Lions P L．The concentration-compactness principle in the calculus of variations，The limit case 2．Rev Mat Iberoamerioana，1985，1：145～201

10 Sacks J，Uhlenbeck K．The existence of minimal immersions of 2-spheres．Ann Math，1981，113：1～24

11 Brezis H．Elliptic equations with limiting Sobolev exponents——the impact of topology．Commun Pure and Appl Math，1986，ⅩⅩⅩⅩⅨ：S17～S39

12 朱熹平．临界增长拟线性椭圆型方程的非平凡解．中国科学，A 辑，1988，(3)：225～237

13 Pohozaev S I．Eigenfunctions of the equation $-\Delta u+\lambda f(u)=0$．Soviet Math Dold，1965，6：1 408～1 411

14 Gidas B，Ni W-M，Nirenberg L．Symmetry and related properties via the maximum principle．Commun Math Phys，1979，68：209～243

15 Ni W-M，Sacks P E．Singular behaviour in nonlinear parabolic equations．Tran of the AMS，1985，287(2)：657～671

16 Ni W-M，Sacks P E．The number of peaks of positive solutions of semilinear parabolic equations．SIAM J Math Anal，1985，16(3)：460～471