第 39 卷　第 5 期　　厦门大学学报(自然科学版)　　Vol.39　No.5
2000 年 9 月　　Journal of Xiamen University (Natural Science)　　Sep. 2000
文章编号: 0438-0479(2000)05-0577-04

一类二元Sz sz型算子列

曾　晓　明
(厦门大学数学系,福建 厦门　361005)

摘要: 利用一列二元随机向量引入一类二元的 Sz sz 概率型算子列,并研究其逼近性质. 利用概率论方法结合算子逼近论方法,证明其具有 Lipschitz 函数类保持性质. 进一步地,由 Lebesgue-Stieltjes 积分表示,证明在一定条件下逆命题也成立.

关键词: Sz sz 型算子列; 随机向量; Lipschitz 类
中图分类号: O 174.41　　文献标识码: A

1　主要结果

设 I_k 是 R^k 的一个凸子集, f 是 I_k 上的一个实函数, 如果存在 $A \geq 0$, 使得对任意的 $\alpha, \beta \in I_k$, 都有

$$f(\alpha) - f(\beta) \leq A \| \alpha - \beta \|^{\mu} \tag{1}$$

这里 $\mu \in (0,1]$, $\| \quad \|$ 是 R^k 中的 l_1 范数. 则称 f 属于 $\mathrm{Lip}_A \mu(I_k)$.

1987 年, Brown[1] 等证明了著名的Bernstein 算子列具有 Lipschitz 类保持性质. 后来 Khan 和 Peter[2] 把文献[1] 的工作拓展到一类较广泛的逼近算子——包括一元的 Bernstein、Baskakov、Sz sz、Gamma 算子、卷积算子以及由它们构成的乘积型算子. Chen[3] 则研究了二维的 Stancu-M hlbach 算子的这类性质. 我们将利用随机向量引入二维角形域上的 Sz sz 型算子列, 证明其具有 Lipschitz 类保持性质, 相应的逆命题也一并给出和证明.

设 $\Omega = \{(x, y) \quad 0 \leq y \leq x < +\infty\}$ 为平面上的角形域, $(X_{n,x}, Y_{n,y})$ 是 Ω 上具有参数 (n, x, y) 的随机向量, 其联合概率分布如下:

$$P(X_{n,x} = l, Y_{n,y} = j) = \frac{n^l y^j (x - y)^{l-j}}{j!(l-j)!} e^{-nx} \tag{2}$$

其中 $x \geq y \geq 0$, n 为正整数, l, j 为非负整数且 $l \geq j$.

对 Ω 上的可测实函数 $f(x, y)$, 利用数学期望定义如下的二元 Sz sz 算子列 $S_n(f)$

$$S_n(f; x, y) = Ef\left(\frac{X_{n,x}}{n}, \frac{Y_{n,y}}{n}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{l} f\left(\frac{l}{n}, \frac{j}{n}\right) \frac{n^l y^j (x-y)^{l-j}}{j!(l-j)!} e^{-nx} \tag{3}$$

收稿日期: 2000-04-19
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871068)
作者简介: 曾晓明(1955-), 男, 副教授.

本文的主要结果如下:

定理 1 如果 $f \in \mathrm{Lip}_A\mu(\Omega)$, 那么对所有的 n, 有 $S_n(f) \in \mathrm{Lip}_A\mu(\Omega)$.

记 $C_B(\Omega) = \{f \mid f \in C(\Omega)$ 且 $\|f\|_{C(\Omega)} < +\infty\}$, 那么如下定理 1 的逆命题成立:

定理 2 设 $f \in C_B(\Omega)$. 如果对每个 $n > 0$, 有 $S_n(f) \in \mathrm{Lip}_A\mu(\Omega)$, 则 $f \in \mathrm{Lip}_A\mu(\Omega)$.

2 定理 1 的证明

由文献[2, 定理 2], 我们需要证明随机向量 $(X_{n,x}, Y_{n,y})$ 具有分裂性质. 计算得到

$$P(X_{n,x} = l) = \sum_{j=0}^{l} P(X_{n,x} = l, Y_{n,y} = j) =$$

$$\sum_{j=0}^{l} \frac{n^l y^j (x - y)^{l-j}}{j!(l-j)!} e^{-nx} = \frac{n^l e^{-nx}}{l!} \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} y^j (x-y)^{l-j} = \frac{n^l x^l}{l!} e^{-nx} \tag{4}$$

同理算得

$$P(Y_{n,y} = j) = \frac{n^j y^j}{j!} e^{-ny} \tag{5}$$

设 $\xi_1 = (x_1, y_1) \in \Omega, \xi_2 = (x_2, y_2) \in \Omega, \zeta_1 \neq \zeta_2$, 令

$$X^* = \min\{x_1, x_2\}, y^* = \min\{y_1, y_2\},$$

$$C_1 = \begin{cases} 1 & x_1 > x_2 \\ 0 & x_1 \leq x_2 \end{cases}; C_2 = \begin{cases} 1, & y_1 > y_2 \\ 0 & y_1 \leq y_2 \end{cases}$$

构造如下 3 个随机向量:

$$\begin{cases} W_n = (X_{n,x^*}, Y_{n,y^*}) \\ R_{\xi_1} = (X_{n,\ x_1-x_2} C_1, Y_{n,\ y_1-y_2} C_2) \\ R_{\xi_2} = (X_{n,\ x_1-x_2}(1 - C_1), Y_{n,\ y_1,-y_2}(1 - C_2)) \end{cases} \tag{6}$$

另外对 $0 < x_2 < x_1$, 定义如下联合概率分布:

$$P(X_{n,x_2} = j, X_{n,x_1-x_2} = k) = \frac{(nx_2)^j}{j!} e^{-nx_2} \frac{(nx_1 - nx_2)^k}{k!} e^{-n(x_1-x_2)} \tag{7}$$

对 $0 < y_2 < y_1$, 定义

$$P(Y_{n,y_2} = j, Y_{n,y_1-y_2} = k) = \frac{(ny_2)^j}{j!} e^{-ny_2} \frac{(ny_1 - ny_2)^k}{k!} e^{-n(y_1-y_2)} \tag{8}$$

直接的计算得到

引理 1 当 $x_1 > x_2$ 时, 有

$$X_{n,x_2} + X_{n,x_1-x_2} \sim X_{n,x_1} \tag{9}$$

当 $y_1 > y_2$ 时, 有

$$Y_{n,y_2} + Y_{n,y_1-y_2} \sim Y_{n,y_1} \tag{10}$$

其中“～”表示随机向量具有相同分布.

下面证明

$$W_n + R_{\xi_1} \sim (X_{n,x_1}, Y_{n,y_1}) \tag{11}$$

分 4 种情况:

1) $x_1 > x_2$ 且 $y_1 > y_2$, 则由式(6), 有

$$W_n + R_{\xi_1} \sim (X_{n,x_2} + X_{n,x_1-x_2}; Y_{n,y_2} + Y_{n,y_1-y_2});$$

2) $x_1 > x_2$ 且 $y_1 \leq y_2$, 则

$$W_n + R_{\xi_1} \sim (X_{n,x_2} + X_{n,x_1-x_2}; Y_{n,y_1});$$

3) $x_1 \le x_2$ 且 $y_1 > y_2$, 则

$$W_n + R_{\xi_1} \sim (X_{n,x_1}; Y_{n,y_2} + Y_{n,y_1-y_2});$$

4) $x_1 \le x_2$ 且 $y_1 \le y_2$, 则

$$W_n + R_{\xi_1} \sim (X_{n,x_1}; Y_{n,y_1})$$

综合上述 4 种情况并用引理 1, 即得式(11).

类似的证明得到

$$W_n + R_{\xi_2} \sim (X_{n,x_2}; Y_{n,y_2}) \tag{12}$$

简单的计算得到

$$\| R\zeta_1 - R\zeta_2 \|_{l_1} = (2C_1 - 1) X_{n,x_1-x_2} + (2C_2 - 1) Y_{n,y_1-y_2}$$

因此算得数学期望

$$E \| R\zeta_1 - R\zeta_2 \| = E(X_{n,x_1-x_2}) + E(Y_{n,y_1-y_2}) =$$

$$n x_1 - x_2 + n y_1 - y_2 = n \| \zeta_1 - \zeta_2 \|_{l_1}$$

于是根据式(11)(12) 和文献[2, P.308 - 309], 可知随机向量$(X_{n,x}, Y_{n,y})$ 具有分裂性质, 定理 1 得证.

3　定理 2 的证明

把算子(3) 写成 Lebesgue-Stieltjes 积分表示式:

$$S_n(f; x, y) = Ef\left(\frac{X_{n,x}}{n}, \frac{Y_{n,y}}{n}\right) = \int_{R^2} f(\zeta)\, \mathrm{d}F_{n,\eta}(\zeta) \tag{13}$$

其中 $F_{n,\eta}(\xi)$ 是$\left(\frac{X_{n,x}}{n}\ \frac{Y_{n,y}}{n}\right)$ 的分布函数, $\eta = (x, y)$, $\xi = (u_1, u_2) \in R^2$.

由条件 f 在 η 连续, 所以对 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $\| \xi - \eta \| < \delta$ 时, 有 $f(\xi) - f(\eta) < \epsilon$. 又由 f 的有界性, 有 $M > 0$, 使 $f(\xi) - f(\eta) < M$. 注意到概率分布的性质:

$$\int_{R^2} \mathrm{d}F_{n,\eta}(\xi) = 1$$

所以 $$S_n(f, \eta) - f(\eta) = \int_{R_2} (f(\xi) - f(\eta))\, \mathrm{d}F_{n,\eta}(\xi) \le$$

$$\int_{\|\xi-\eta\|<\delta} f(\xi) - f(\eta)\, \mathrm{d}F_{n,\eta}(\xi) + \int_{\|\xi-\eta\|\ge\delta} f(\xi) - f(\eta)\, dF_{n,\eta}(\xi) <$$

$$\epsilon + \int_{R^2} M \| \xi - \eta \| / \delta \mathrm{d}F_{n,\eta}(\xi) \tag{14}$$

直接计算得到

$$S_n((u_1 - x)^2; x, y) = x/n \to 0, (n \to \infty)$$

$$S_n((u_2 - y)^2; x, y) = y/n \to 0, (n \to \infty)$$

用 Schwarz 不等式立即得积知式(14) 的右边趋向于 0(当 $n \to \infty$ 时). 最后推后 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f, \eta) = f(\eta)$. 由定义推出对 $S_n(f) \in \mathrm{Lip}_A \mu(\Omega)$. 则有 $f \in \mathrm{Lip}_A \mu(\Omega)$, 定理 2 证毕.

参考文献:

[1] Brown B M, Elliott D, Pager D F. Lipschitz constants for the Bernstein polynomials of a Lipschitz continuous function[J]. J. Approx. Theory, 1987, 49: 196– 199.

[2] Khan M K, Peters M A. Lipschitz constants for some approximation operators of a Lipschitz continuous function[J]. J. Approx. Theory, 1989, 59: 307– 315.

[3] Chen W Z. On two dimenstonal Stancu-Muhlbach operator[J]. Approx. Theory & its Appl., 1997 13(3): 70– 78.

[4] 曾晓明. 两类不同区上概率型算子族的逼近性质[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 1998, 37(2): 165–169.

On a Class of Two Dimensional Sz sz Type Operators

ZENG Xiao-ming

(Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

Abstract A class of two dimensional Sz sz probabilistic type operators are introduced by a sequence of two dimensional random vectors, and their approximation properties are further studied by means of some probabilistic method in combination with the method of approximation of operators. Under certain conditions, an inverse theorem is also proved.

Key words Sz sz type operators; random vector; Lipschitz class