第 39卷 第 3期 厦门大学学报(自然科学版) Vol. 39 No. 3
2000年 5月 Journal of Xiamen University (Natural Science) May 2000
文章编号: 0438-0479(2000)03-0281-07

Stein流形上(p, q)型微分形式的Koppelman-Leray公式的拓广

姚宗元, 詹惠蓉
(厦门大学数学系, 福建 厦门 361005)

摘要: 为进一步研究 Stein流形上的 Koppelman-Leray公式, 采用 Bochner-Martinelli的方法, 并将之推广到 Stein流形上. 便可得到一个 Stein流形上(p, q)型微分形式的 Koppelman-Leray公式的一种拓广式, 该拓广式的特点是积分核中含有可供选择的实参数 m 及 (D, s, h)的 Leray截面, 当 $m = 2$时, 可得到 Stein流形上已有的(p, q)型微分形式的 Koppelman-Leray公式, 而当取 $m = 3, 4, \cdots, N$ $(N < +\infty)$时, 可相应得到 Stein流形上一系列积分核彼此不同的积分公式. 由该拓广式还可得到 C^n空间中(p, q)型微分形式 Koppelman-Leray公式在 Stein流形上的推广.

关键词 Stein流形; (p, q)型微分形式; Koppelman-Leray公式; 拓广式
中图分类号 O 174.56 文献标识码: A

1986年本文第 1作者在文献[1]中曾给出了 Bochner-Martinelli积分表示的一种拓广形式, 并给出了它的一些应用. 这个拓广式中含有实参数 $m \geqslant 2$, 当 $m = 2$时, 即得到著名的 Bochner-Martinelli公式, 而当 $m > 2$时, 能使被积函数在边界上的条件减轻. 最近文献[5]得到了 Stein流形上(p, q)型微分形式的 Koppelman公式的拓广式, 现本文的目的是将该公式进一步拓广成 Stein流形上(p, q)型微分形式的Koppelman-Leray公式的一种拓广式, 这个拓广式的特点是积分核中含有可供选择的实参数和(D, S, h)的 Leray截面, 当适当选择其中参数, 则可得到文献[2]中已有的 Stein流形上(p, q)型微分形式的 Koppelman-Leray公式以及一系列积分核彼此不同的积分公式.

1 有关概念与记号

在 Stein流形上, Henkin和 Leiterer[3]所构造的积分核已不适用于(p, q)型微分形式. 因为这时不能象 C^n空间中一样采用 Euclid度量, 主要原因是 Stein流形上 Euclid度量已不是全纯变换下的不变式. 为了解决不变度量的问题, J. P. Demailly和 C. Laurent-Thiebaut[2]引进了 Hermite度量和陈联络构造了 Stein流形上(p, q)型微分形式在不变度量下的积分核, 并应用

收稿日期: 1999-11-18
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19771068)
作者简介: 姚宗元(1941-), 男, 教授.

纤维丛上的本性微分和联络,得到了 Stein 流形上的 Koppelman-Leray 公式,现我们将这一公式进一步拓广.

本文所采用的术语和记号同文献[4]. 设 M 是 Stein 流形, M 上的切丛,余切丛分别记为 $T(M)$, $T^*(M)$. $\tilde{T}(M\times M)$ 和 $\tilde{T}^*(M\times M)$ 分别为 $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 关于投影 $M\times M\to M$, $(z,\zeta)\to z$ 的拉回. 记 $\bar{T}^*(M\times M\times[0,1])$ 为 $T^*(M)$ 关于映射 $(z,\zeta,\lambda)\to z$ 的拉回,设 θ 为 $T(M)$ 上的 C^∞ Hermite 度量,它在 $\tilde{T}(M\times M)$, $\tilde{T}^*(M\times M)$ 和 $\bar{T}^*(M\times M\times[0,1])$ 上诱导的度量分别为 θ, θ^*, $\bar{\theta}^*$. 命 D 为 $\tilde{T}(M\times M)$ 关于 θ 的陈联络. ∇ 为 $\tilde{T}^*(M\times M)$ 关于度量 θ^* 的陈联络, $\triangle$ 为 $\bar{T}^*(M\times M\times[0,1])$ 关于度量 $\bar{\theta}^*$ 的陈联络. 又设 τ: $\tilde{T}(M\times M)\to\tilde{T}^*(M\times M)$, $\zeta\to\langle\cdot,\zeta\rangle_\theta$ 为一反线性映射. 设 $\hat{s}$ 为 C^∞ 截面, $M\times M\to\tilde{T}^*(M\times M)$, 它由 $\hat{S}=\tau\circ s$ 定义,易知[4] $(\hat{s},k)$ 是一关于 (D,S,ω) 的 Leray 截面. 记 $|s|_\theta^2=\langle\hat{s},s\rangle$.

设 $C_k^\infty(M\times M\times[0,1],E^*)$ 为 $M\times M\times[0,1]$ 上取值于 $E^*=T^*(M\times M\times[0,1])$ 的 k 阶微分形式的空间,有分解式[4]:

$$\bar{E}^*=\bar{T}^*(M\times M\times[0,1])=\bigoplus_{p+q+r=k}C_{p,q,r}^\infty(M\times M\times[0,1],\bar{E}^*)$$

其中 $C_{p,q,r}^\infty(M\times M\times[0,1],\bar{E}^*)$ 表示关于 (z,ζ) 是 (p,q) 型的关于 λ 是 r 次的微分形式的空间,联络 $\triangle$ 可分解为[4]: $\triangle=\triangle'+\triangle''$, 其中

$$\triangle': C_{p,q,r}^\infty(M\times M\times[0,1],E^*)\to C_{p+1,q,r}^\infty(M\times M\times[0,1],E^*)$$

$$\triangle'': C_{p,q,r}^\infty(M\times M\times[0,1],\bar{E}^*)\to C_{p,q+1,r}^\infty(M\times M\times[0,1],\bar{E}^*)\oplus C_{p,q,r+1}^\infty(M\times M\times[0,1],\bar{E}^*)$$

设 D 为 Stein 流形 M 上的一相对紧开子集,它的边界是逐块 $C^{(1)}$ 的,又 (s^*,k^*) 为 (D,s,ω) 的 Leray 截面,现对所有使 $\langle s^*(z,\zeta),s(z,\zeta)\rangle\neq 0$ 的 $z\in D$ 和 ∂D 的某一邻域中的 ζ, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, 定义

$$t^{*(m)}(z,\zeta,\lambda)=(1-\lambda)\frac{s^*(z,\zeta)}{\langle s^*(z,\zeta),s(z,\zeta)\rangle}+\lambda\frac{\hat{s}|s|_\theta^{m-2}}{\langle\hat{s}|s|_\theta^{m-2},s\rangle}\tag{1}$$

其中 $m=2,3,\cdots,N$ $(N<+\infty)$. 由 ω, s 和 s^* 的性质以及文献[5]可知,对整数 $\nu\geqslant\max(nk^*,\frac{mn}{2}k)$, 微分形式

$$K^{(m)}(\omega,s^*,\hat{s}|s|_\theta^{m-2},s)=\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi i)^n}\omega\langle t^{*(m)},Ds\rangle\wedge(\langle\triangle''t^{*(m)},Ds\rangle)^{n-1}\tag{2}$$

是一在 $D\times M\times[0,1]$ 中 $D\times\partial D\times[0,1]$ 的一个邻域中连续的积分核.

若 $v^{*(m)}$ 是 $t^{*(m)}$ 的局部坐标表示,则有

$$\triangle't^{*(m)}=\partial_{z,\zeta}v^{*(m)}+H(\partial_{z,\zeta}H^{-1})\wedge v^{*(m)}$$

$$\triangle''t^{*(m)}=(\bar{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)v^{*(m)}$$

其中 H 为度量 θ 在 $T(M)$ 的平凡化中的矩阵.

2 几个引理

为了得到 Stein 流形上 Koppelman-Leray 公式的拓广式,先引进以下几个引理.

引理 1[5](拓广的 Koppelman 公式) 设 D 是 Stein 流形 M 上的一相对紧开子集,它的边界是逐块 $C^{(1)}$ 的,并且整数 $\nu\geqslant\frac{mn}{2}k$, 如果 f 是一在 $\bar{D}$ 上连续且 $\bar{\partial}f$ 在 $\bar{D}$ 仍然连续的 (p,q) 型

微分形式, $0 \leqslant p, q \leqslant n$则对任一 $z \in D$, 有

$$f(z) = (-1)^{p+q}\left[\int_{Y \in \partial D} f(Y) \wedge K_q^{p(m)}(z, Y) - \int_{Y \in D} \bar{\partial} f(Y) \wedge K_q^{p(m)}(z, Y) + \bar{\partial}_z \int_{Y \in D} f(Y) \wedge K_{q-1}^{p(m)}(z, Y) + (-1)^{p+q+1} \int_{Y \in D} f(Y) \wedge P_q^{p(m)}(z, Y)\right] \tag{3}$$

这里 $m = 2, 3, \cdots, N\ (N < +\infty)$, $K_q^{p(m)}(z, Y) = K_q^{p(m)}(\hbar, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)(z, Y)$, 又 $P_q^{p(m)}$ 是 $\bar{\partial} K^{(m)}$ 中关于 z 为 (p, q) 型的分量, 而

$$K^{(m)}(\hbar, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}), s)(z, Y) = \sum_{\leqslant p \leqslant n} K_q^{p(m)}(\hbar, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)(z, Y) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2C)^n} \hbar \frac{\langle \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, D s\rangle \wedge (\langle 5''(\hat{s}|s|_\theta^{m-2}, D s\rangle)^{n-1}}{\langle \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s\rangle^n} \tag{4}$$

其中 $1 \leqslant q \leqslant n-1$. 式 (3) 当 $m = 2$时即为文献 [2]中已有的 Koppelman公式.

引理 2　有关记号如前面定义, 则有下面等式成立:

$$K^{(m)}(\hbar, \overset{*}{s}, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)|_{\lambda=0} = K(\hbar, \overset{*}{s}, s) \tag{5}$$

$$K^{(m)}(\hbar, \overset{*}{s}\, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)|_{\lambda=1} = K^{(m)}(\hbar, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s) \tag{6}$$

其中 $m = 2, 3, \cdots, N\ (N < +\infty)$, $K^{(m)}(\hbar, \overset{*}{s}, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)$ 为式 (2) 所定义, 而

$$K(\hbar, \overset{*}{s}, s) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2C)^n} \hbar \frac{\langle \overset{*}{s}, D s\rangle \wedge (\langle 5''\overset{*}{s}, D S\rangle)^{n-1}}{\langle \overset{*}{s}, s\rangle^n} \tag{7}$$

证　显然由 $\overset{*}{t}{}^{(m)}$ 的表达式 (1) 式可知, 我们只要证明对所有定义在包含 $\tilde{T}^*(M \times M)$ 的截面 $\overset{*}{s}$ 的定义域的开集上的所有函数 _, 下述等式成立即可:

$$\langle \_\overset{*}{s}, D s\rangle \wedge (\langle \triangle''(\_\overset{*}{s}), D s\rangle)^{n-1} = \_^n \langle \overset{*}{s}, D s\rangle \wedge (\langle \triangle''\overset{*}{s}, D s\rangle)^{n-1} \tag{8}$$

事实上, 由于

$$(\_\overset{*}{s}, D s) \wedge \langle \triangle''\_ \wedge \overset{*}{s}, D s\rangle = -\_\triangle''\_ \wedge \langle \overset{*}{s}, D s\rangle \wedge \langle \overset{*}{s}, D s\rangle = 0$$

则可得式 (8). 当 $\lambda = 0$时, 命 $\_ = \langle \overset{*}{s}, s\rangle^{-1}$; 当 $\lambda = 1$时, 命 $\_ = \langle \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s\rangle^{-1}$, $\overset{*}{s} = \hat{s}|s|_\theta^{m-2}$, 应用上述等式, 即知式 (5), (6). 证毕.

引理 3　有关记号如前面定义, 又设 $W \times [0, 1]$为 $K^{(m)}(\hbar, \overset{*}{s}, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)$ 的定义域, $W \subset D \times M$, 则对所有 $(z, Y, \lambda) \in W \times [0, 1]$, 有

$$(\bar{\partial}_{z, Y} + d_\lambda) K^{(m)}(\hbar, \overset{*}{s}, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2C)^n} \hbar [\langle \overset{*}{t}{}^{(m)}, C(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s\rangle \wedge (\langle \triangle''\overset{*}{t}{}^{(m)}, D s\rangle)^{n-1} + (n-1)\langle \overset{*}{t}{}^{(m)}, D s\rangle \wedge \langle \triangle''\overset{*}{t}{}^{(m)}, C(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s\rangle \wedge (\langle \triangle''\overset{*}{t}{}^{(m)}, D s\rangle)^{n-2}] \tag{9}$$

其中 $m = 2, 3, \cdots, N\ (N < +\infty)$. 如果 $C(\tilde{T}(M \times M)) = 0$, 则有

$$(\bar{\partial}_{z, Y} + d_\lambda) K^{(m)}(\hbar, \overset{*}{s}, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s) = 0 \tag{10}$$

证　首先, 我们有

$$(\bar{\partial}_{z, Y} + d_\lambda) K^{(m)}(\hbar, \overset{*}{s}, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2C)^n} \hbar [(\langle \triangle''\overset{*}{t}{}^{(m)}, D s\rangle)^n + \langle \overset{*}{t}{}^{(m)}, D^2 s\rangle \wedge (\langle \triangle''\overset{*}{t}{}^{(m)}, D s\rangle)^{n-1} - (n-1)\langle \overset{*}{t}{}^{(m)}, D s\rangle \wedge (\langle \triangle''^2\overset{*}{t}{}^{(m)}, D s\rangle - \langle \triangle''\overset{*}{t}{}^{(m)}, D^2 s\rangle) \wedge (\langle \triangle''\overset{*}{t}{}^{(m)}, D s\rangle)^{n-2}] \tag{11}$$

其中 $\triangle''^2 = 0, D^2 s = C(\tilde{T}(M\times M))\wedge s.$

现考虑 $\bar{T}^*(M\times M\times[0,1])$ 的一个平凡化，设 $v^{*(m)}$ 为 $\overset{*}{t}{}^{(m)}$ 在这个平凡化中的表示，又 u 为 s 在 $\tilde{T}(M\times M)$ 的一个平凡化中的表示，则

$$\varphi(\langle\triangle''\overset{*}{t}{}^{(m)}, Ds\rangle)^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!\,(\bigwedge_{j=1}^{n}(\bar{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)(\varphi v_j^{*(m)})\wedge$$

$$(\bigwedge_{k=1}^{n} du_k + ((H^{-1}\partial H)\wedge\_{k})) \qquad (12)$$

由 $\overset{*}{t}{}^{(m)}$ 的定义知有

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi v_k^{*(m)}\_{k} = \varphi$$

由于函数 φ 与 u_k 关于 (z,ζ) 是全纯的，并与 λ 无关，所以有

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(\bar{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)(\varphi v_k^{*(m)}) = 0 \qquad (13)$$

因而

$$\bigwedge_{k=1}^{n}(\bar{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)(\varphi v_k^{*(m)}) = 0 \qquad (14)$$

由 Leray 截面的性质知式(13)左端是连续的，而集合 $\{(z,\zeta,\lambda)\in W\times[0,1]: s(z,\zeta)\neq 0\}$ 在 $W\times[0,1]$ 中是稠密的，因此有

$$\varphi(\langle\triangle''\overset{*}{t}{}^{(m)}, Ds\rangle)^n = 0 \qquad (15)$$

3　Stein 流形上 (p,q) 型微分形式的 Koppelman-Leray 公式的拓广式

下面我们证明 Stein 流形上 (p,q) 型微分形式的 Koppelman-Leray 公式的一种含有参数的拓广式.

定理 1 (拓广的 Koppelman-Leray 公式)　设 D 为 Stein 流形 M 上具有逐块 $C^{(1)}$ 边界的相对紧开子集，$(\overset{*}{s}, k^*)$ 为 (D, s, φ) 的 Leray 截面，整数 $v\geqslant \max(nk^*, mnk)$，又假设 $\varphi(z,\zeta)\overset{*}{s}(z,\zeta)/\langle\overset{*}{s}(z,\zeta), s(z,\zeta)\rangle$ 所有关于 z 阶数 $\leqslant 2$ 的导数，和所有关于 ζ 阶数 $\leqslant 1$ 的导数，在 $D\times\partial D$ 的某一邻域 $W\subseteq D\times M$ 中关于 (z,ζ) 是连续的，则对每一在 $\bar{D}$ 上连续且 $\bar{\partial}f$ 在 $\bar{D}$ 上仍然连续的 (p,q) 型微分形式 f, $0\leqslant p, q\leqslant n$, 有

$$(-1)^{p+q}f(z) = \int_{\zeta\in\partial D} f(\zeta)\wedge K_q^p(\varphi, \overset{*}{s}, s)(z,\zeta) -$$

$$\int_{\zeta\in D}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge K_q^{p(m)}(\varphi, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)(z,\zeta) -$$

$$\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge \tilde{K}_q^{p(m)}(\varphi, \overset{*}{s}, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)(z,\zeta,\lambda) +$$

$$\bar{\partial}_z\Big(\int_{\zeta\in D} f(\zeta)\wedge K_{q-1}^{p(m)}(\varphi, \overset{*}{s}, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)(z,\zeta) +$$

$$\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]} f(\zeta)\wedge \tilde{K}_{q-1}^{p(m)}(\varphi, \overset{*}{s}, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)(z,\zeta,\lambda)\Big) +$$

$$(-1)^{p+q+1}\Big[\int_{\zeta\in D} f(\zeta)\wedge P_q^{p(m)}(z,\zeta) + \int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]} f(\zeta)\wedge Q_q^{p(m)}(z,\zeta,\lambda)\Big], z\in D \qquad (16)$$

其中 $m = 2, 3, \cdots, N\ (N < +\infty)$, 又

$$K_q^p(\xi, s^*, s),\ K_q^{p(m)}(\xi, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s),$$
$$\tilde{K}_q^{p(m)}(\xi, s^*, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s),\ P_q^{p(m)},\ Q_q^{p(m)}$$

分别表示 $\tilde{K}(\xi, s^*, s)$, $\tilde{K}^{(m)}(\xi, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)$, $\overline{K}^{(m)}(\xi, s^*, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)$, $\bar{\partial}_{z,\zeta}\tilde{K}^{(m)}(\xi, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)$, $(\bar{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\tilde{K}^{(m)}(\xi, s^*, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)$ 关于 z 是 (p, q) 型的分量.

注 1　当 $m = 2$时, 式 (16) 即为文献 [2]中已有的 Koppelman-Leray公式. 因为此时

$$K_q^{p(2)}(\xi, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s) = K_q^p(\xi, \hat{s}, s)$$
$$\tilde{K}_q^{p(2)}(\xi, s^*, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s) = \tilde{K}_q^p(\xi, s^*, \hat{s}, s)$$
$$P_q^{p(2)}(z, \zeta) = P_q^p(z, \zeta),\ Q_q^{p(2)}(z, \zeta, \lambda) = Q_q^p(z, \zeta, \lambda)$$

而当取 $m = 3, 4, \cdots, N\ (N < +\infty)$ 时, 则可得到一系列积分核彼此不同的积分公式.

注 2　如果 $p = 0$, 则 $P_q^{p(m)} = Q_q^{p(m)} = 0$, 因为 $C(\tilde{T}(M \times M))$ 关于 z 是 $(1, 1)$ 型的. 若又取 $m = 2$, 显然由注 1及文献 [4], 可知, 由式 (16) 可得到文献 [3] 中关于 $(0, q)$ 型微分形式的 Koppelman-Leray公式.

注 3　如果度量 θ 使得 $C(\tilde{T}(M \times M)) = 0$, 则有 $P_q^{p(m)} = Q_q^{p(m)} = 0$, 此由文献 [3]引理 3和本文引理 3可知. 若又取 $m = 2$, 这时根据文献 [4]知由式 (16) 便可得到 C^n 空间中 (p, q) 型微分形式的 Koppelman-Leray公式在 Stein流形上的相应拓广.

证　首先, 因为

$$d_{\zeta,\lambda}[f(\zeta) \wedge \tilde{K}_q^{p(m)}(\xi, s^*, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)] =$$
$$(\bar{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)[f(\zeta) \wedge \tilde{K}_q^{p(m)}(\xi, s^*, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)] -$$
$$\bar{\partial}_z[f(\zeta) \wedge \tilde{K}_{q-1}^{p(m)}(\xi, s^*, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)] =$$
$$\bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \tilde{K}_q^{p(m)}(\xi, s^*, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s) + (-1)^{p+q} f(\zeta) \wedge Q_q^{p(m)}(z, \zeta, \lambda) - \bar{\partial}_z[f(\zeta) \wedge \tilde{K}_{q-1}^{p(m)}(\xi, s^*, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)] \tag{17}$$

现在 $\partial D \times [0, 1]$上对 $f(\zeta) \wedge \tilde{K}_q^{p(m)}(\xi, s^*, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)$ 应用 Stokes公式, 则有

$$\int_{\lambda=0} d_{\zeta,\lambda}[f(\zeta) \wedge \tilde{K}_q^{p(m)}(\xi, s^*, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s)] =$$
$$\int_{\lambda=1,\zeta\in\partial D} f(\zeta) \wedge \tilde{K}_q^{p(m)}(\xi, s^*, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s) - \int_{\lambda=1,\zeta\in\partial D} f(\zeta) \wedge \tilde{K}_q^{p(m)}(\xi, s^*, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s) \tag{18}$$

由式 (17) 及引理 2可得

$$\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \tilde{K}_q^{p(m)}(\xi, s^*, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s) +$$
$$(-1)^{p+q}\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]} f(\zeta) \wedge Q_q^{p(m)}(\xi, s^*, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s) -$$
$$\bar{\partial}_z \int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]} f(\zeta) \wedge \tilde{K}_{q-1}^{p(m)}(\xi, s^*, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s) =$$
$$\int_{\zeta\in\partial D} f(\zeta) \wedge K_q^p(\xi, s^*, s) - \int_{\zeta\in\partial D} f(\zeta) \wedge K_q^{p(m)}(\xi, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s) \tag{19}$$

又由引理 1知

$$\int_{\zeta\in\partial D} f(\zeta) \wedge K_q^{p(m)}(\xi, \hat{s}|s|_\theta^{m-2}, s) = (-1)^{p+q} f(z) + \int_{\zeta\in D} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge K_q^{p(m)}(z, \zeta) -$$

$$\bar\partial_z\int_{\zeta\in D}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_{q-1}^{p(m)}(z,\zeta)-(-1)^{p+q+1}\int_{\zeta\in D}f(\zeta)\wedge P_q^{p(m)}(z,\zeta) \tag{20}$$

将式(20)代入式(19),则得

$$(-1)^{p+q}f(z)=\int_{\zeta\in\partial D}f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(\eta,\overset{*}{s},s)(z,\zeta)-$$

$$\int_{\zeta\in\partial D}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_q^{p(m)}(\eta,\hat{s}|s|_\theta^{m-2},s)(z,\zeta)-$$

$$\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_q^{p(m)}(\eta,\overset{*}{s},\hat{s}|s|_\theta^{m-2},s)(z,\zeta,\lambda)+$$

$$\bar\partial_z\Big(\int_{\zeta\in D}f(\zeta)\wedge\Omega_{q-1}^{p(m)}(\eta,\hat{s}|s|_\theta^{m-2},s)(z,\zeta)+$$

$$\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]}f(\zeta)\wedge\Omega_{q-1}^{p(m)}(\eta,\overset{*}{s},\hat{s}|s|_\theta^{m-2},s)(z,\zeta,\lambda)\Big)+$$

$$(-1)^{p+q+1}\Big[\int_{\zeta\in D}f(\zeta)\wedge P_q^{p(m)}(z,\zeta)+\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]}f(\zeta)\wedge Q_q^{p(m)}(z,\zeta,\lambda)J\Big]$$

定理证毕.

推论 1 在定理 1的条件下,如果进一步假定 $\overset{*}{s}(z,\zeta)$ 关于 $z\in D$ 是全纯的, $q\geqslant 1$,并且 $C(\tilde{T}(M\times M))=0$,则有

$$f(z)=(-1)^{p+q}\Big[\bar\partial_z\Big(\int_{\zeta\in\partial D}f(\zeta)\wedge\Omega_{q-1}^{p(m)}(\eta,\hat{s}|s|_\theta^{m-2},s)(z,\zeta)+$$

$$\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]}f(\zeta)\wedge\Omega_{q-1}^{p(m)}(\eta,\overset{*}{s},\hat{s}|s|_\theta^{m-2},s)(z,\zeta,\lambda)\Big)-$$

$$\Big(\int_{\zeta\in\partial D}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_q^{p(m)}(\eta,\hat{s}|s|_\theta^{m-2},s)(z,\zeta)+$$

$$\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]}\bar\partial_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_q^{p(m)}(\eta,\overset{*}{s},\hat{s}|s|_\theta^{m-2},s)(z,\zeta,\lambda)\Big)\Big] \tag{20}$$

其中 $m=2,3,\cdots,N\ (N<+\infty)$,特别对所有在 $\bar{D}$ 上连续并且在 D 上满足 $\bar\partial f=0$ 的 (p,q) 型微分形式 f

$$g(z)=(-1)^{p+q}\Big(\int_{\zeta\in\partial D}f(\zeta)\wedge\Omega_{q-1}^{p(m)}(\eta,\hat{s}|s|_\theta^{m-2},s)(z,\zeta)+$$

$$\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times[0,1]}f(\zeta)\wedge\Omega_{q-1}^{p(m)}(\eta,\overset{*}{s},\hat{s}|s|_\theta^{m-2},s)(z,\zeta,\lambda)\Big) \tag{21}$$

是方程 $\bar\partial g=f$ 在 D 上的连续解.

证 因为 $\overset{*}{s}$ 关于 $z\in D$ 全纯,所以 $\Omega(\eta,\overset{*}{s},s)(z,\zeta)$ 中不含有 $d\bar{z}_k$ 的项,故当 $q\geqslant 1$ 时,有

$$\int_{\zeta\in\partial D}f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(\eta,\overset{*}{s},s)(z,\zeta)=0 \tag{22}$$

又 $C(\tilde{T}(M\times M))=0$,所以 $P_q^{p(m)}(z,\zeta)=Q_q^{p(m)}(z,\zeta)=0$,故可得式(20),又由于 $\bar\partial f=0$,则易知(21)式成立. 证毕.

注 4 以上推论中式(20)(21),当 $m = 2$时,即为 Demailly和 Laurent-Thiebaut在文献[2]中所得到的相应的公式,而当取 $m = 3, 4, \cdots, N\ (N < +\infty)$时,同样可得到 Stein流形上一系列积分核彼此不同的积分公式以及 $\bar{\partial}$-方程 $\bar{\partial}g = f$的连续解的不同表达式.

参考文献:

[1] 姚宗元. 关于 C^n空间中有界域上的积分表示[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 1986, 25(3): 260-296.

[2] Demailly J. P, Laurent-Thiebaut Ch. Formules integrales pour les formes differentielles de type (p, q) dans les varietes de Stein. Ann. Sci. E′cole Norm. Sup., 1987, 20(4): 579-598.

[3] Henkin G. M., Leiterer J. Theory of functions on complex manifolds[M]. Berlin: Akademie Verlag, 1983.

[4] 钟同德,黄沙. 多元复分析[M]. 石家庄: 河北教育出版社, 1990.

[5] 詹惠蓉,姚宗元. Stein流形上(p, q)型微分形式的 Koppelman公式的拓广[J]. 厦门大学学报(自然科学报), 2000, 39(2): 147-151.

The Generalization of Koppelman-Leray Formula of Differential Form of (p, q)-type on Stein Manifold

YAO Zong-yuan, ZHAN Hui-rong

(Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

Abstract In order to futher the study of the Koppelman-Leray formula of differential form of (p, q)-type on Stein manifold, the method of Bochner-Martinelli is adopted and extended to Stein manifold. The generalization of Koppelman-Leray Formula of Differential form of (p, q)-type on Stein manifold is obtained. The property of this formula is that the integral kernel contains a Leray section of (D, s, h) and a real parameter m which can be chosen. When m is epual to 2, the know Koppelman-Leray formula of differential form of (p, q)-type on Stein manifold is obtained, and when m is $3, 4, \cdots, N\ (N < +\infty)$, a series of different integral formulas with different integral kernels on stein manifold can be obtained accordingly. The relevant generalization on Stein manifold of Koppelman-Leray formula of differential form of (p, q)-type in C^n can also be obtained.

Key words Stein manifold; differential form of (p, q)-type; Koppelman-Leray formula; generalization