系统科学与数学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
20(1) (2000, 1), 117–123

关于 $\mathbb{C}^n$ 中具有逐块光滑边界的有界域上 C-L 公式与 C-F 公式的拓广式*

姚宗元

(厦门大学数学系， 厦门 361005)

摘要 得到了 $\mathbb{C}^n$ 空间中具有逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界的有界域上光滑函数的一个抽象的积分公式. 这个公式的特点是积分核中含有一系列向量函数 $W^{(0,k)}(\zeta,z)$, $W^{(i,k)}(\zeta,z)$ 及一系列独立的实参数 $\mu_{0k}\ge 0, \mu_{ik}\ge 0$. 由这个公式，适当选取其中的参数 μ_{ik} 和向量函数 W，就可得到具有这种逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界的有界域上光滑函数的 Cauchy-Leray 公式和全纯函数的 Cauchy-Fantappiè 公式以及其它一些新的公式.

关键词 Cauchy-Leray 公式， Cauchy-Fantappiè 公式，拓广式，有界域，逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界.

1 有关概念与单位分解

本文是文 [1] 结果的进一步拓广，文中所用到的关于逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界的概念及一些记号 $S_k, S_K, \Delta_K, \Delta_{0K}, \Delta_0$ 见文 [1] 中的定义.

为了在具有逐块光滑边界的有界域上建立 C-L 公式和 C-F 公式的拓广式，我们首先在具有这种边界的有界域上引进一种抽象的单位分解，具体如下：

设 D 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域，具有文 [1] 定义 1 意义下的逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界 ∂D, 向量 $W^{(0,k)}(\zeta,z)\in C^{(1)}(S_k)$,$W^{(i,k)}(\zeta,z)\in C^{(1)}(S_k)$ $(i\in I)$ 且满足

$$\langle W^{(0,k)},\zeta-z\rangle\ne 0,\qquad \langle W^{(i,k)},\zeta-z\rangle\ne 0,\qquad \zeta\in S_k,\, z\in D, \tag{1}$$

其中 $i\in I, k\in K$, $I=(i_1,i_2,\cdots,i_l)$, $K=(k_1,k_2,\cdots,k_l)$ 是严格增加的整数 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_l\le N$, $1\le k_1<k_2<\cdots<k_l\le N$ 的指标集且对每一固定的 $k\in K$, 向量 $W^{(i,k)}(\zeta,z)\in C^{(1)}(S_k)(i\in I)$ 中可以有相同的，又 $\lambda_0\ge 0$, $\lambda_k\ge 0$, $\mu_{0k}\ge 0$, $\mu_{ik}\ge 0$ $(i\in I, k\in K)$ 是在 R^{N+1} 中定义的一系列独立的实参数并满足

$$\lambda_0+\sum_{k\in K}\lambda_k=1,\ \mu_{0k}+\sum_{i\in I}\mu_{ik}=1,\qquad 对每一\ k\in K. \tag{2}$$

---

* 国家自然科学基金资助课题.
收稿日期：1996-12-02，收到修改稿日期：1997-12-11，收到压缩稿日期：1998-08-10.

令

$$A_\alpha^{(k)}(\mu,\zeta,z,W)=\mu_{0k}\frac{W_\alpha^{(o,k)}(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W^{(o,k)}\rangle}+\sum_{i\in I}\mu_{ik}\frac{W_\alpha^{(i,k)}(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W^{(i,k)}\rangle},$$
$$\alpha=1,2,\cdots,n,\ k\in K,\ \zeta\in S_k,\ z\in D. \tag{3}$$

现定义

$$B_\alpha(\lambda,\mu,\zeta,z,W)=\lambda_0\frac{\overline{\zeta}_\alpha-\overline{z}_\alpha}{|\zeta-z|^2}+\sum_{k\in K}\lambda_k A^{(k)}(\mu,\zeta,z,W), \tag{4}$$

则易知 $B_\alpha(\lambda,\mu,\zeta,z,W),\alpha=1,2,\cdots,n$ 为 D 上的一个抽象的单位分解. 事实上, 由式 (2),(3) 首先有

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{n}(\zeta_\alpha-z_\alpha)A_\alpha^{(k)}(\mu,\zeta,z,W)\\ =&\mu_{0k}\sum_{\alpha=1}^{n}(\zeta_\alpha-z_\alpha)\frac{W_\alpha^{(0,k)}(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W^{(0,k)}\rangle}+\sum_{i\in I}\mu_{ik}\sum_{\alpha=1}^{n}(\zeta_\alpha-z_\alpha)\frac{W_\alpha^{(i,k)}(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W^{(i,k)}\rangle}\\ =&\mu_{0k}+\sum_{i\in I}\mu_{ik}=1,\qquad k\in K.\end{aligned} \tag{5}$$

又由式 (1),(4) 有

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{n}(\zeta_\alpha-z_\alpha)B_\alpha(\lambda,\mu,\zeta,z,W)\\ =&\lambda_0\sum_{\alpha=1}^{n}(\zeta_\alpha-z_\alpha)\frac{\overline{\zeta}_\alpha-\overline{z}_\alpha}{|\zeta-z|^2}+\sum_{k\in K}\lambda_k\sum_{\alpha=1}^{n}(\zeta_\alpha-z_\alpha)A^{(k)}(\mu,\zeta,z,W)\\ =&\lambda_0+\sum_{k\in K}\lambda_k=1.\end{aligned} \tag{6}$$

此外, 类似文 [2] 中的证明易知, 当 $f(z)\in C^{(\infty)}(\overline{D})$ 时, 则对任一固定的 $z\in D$ 和整数 $1\le k_1<k_2<\cdots<k_l\le N$ 的每一严格增加的指标集 $K=(k_1,k_2,\cdots,k_l)$, 在广义函数意义下, 有

$$d_{\zeta,\lambda}[f(\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}(B(\lambda,\mu,\zeta,z,W))\wedge \mathrm{d}\zeta=\overline{\partial}f(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta,\lambda}(B(\lambda,\mu,\zeta,z,W))\wedge\mathrm{d}\zeta, \tag{7}$$

其中

$$\omega'(\eta)=\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}\eta_\alpha\mathrm{d}\eta_1\wedge\cdots\wedge[\alpha]\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\eta_n,$$

式 (7) 对所有 $\lambda\in\Delta_{0K}$ 和在 S_K 的某一邻域上的 ζ 都成立.

2 有界域上 C-L 公式与 C-F 公式的拓广

下面我们分别在具有逐块光滑边界的有界域上建立 Cauchy-Leray 公式和 Cauchy-Fantappiè 公式的拓广式.

定理 1　设 D 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域，具有文 [1] 定义 1 意义下的逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界 ∂D，向量函数 $W^{(0,k)}(\zeta,z)\in C^{(1)}(S_k), W^{(i,k)}(\zeta,z)\in C^{(1)}(S_k)(i\in I)$ 且 $\langle W^{(o,k)}(\zeta,z),\zeta-z\rangle\neq 0$, $\langle W^{(i,k)}(\zeta,z),\zeta-z\rangle\neq 0$, $\zeta\in S_k$, $z\in D$. 其中 $i\in I, k\in K, I=(i_1,i_2,\cdots,i_l), K=(k_1,k_2,\cdots,k_l)$ 是严格增加的整数 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_l\le N, 1\le k_1<k_2<\cdots<k_l\le N$ 的指标集，且对每一固定的 $k\in K$, 向量 $W^{(i,k)}(\zeta,z)\in C^{(1)}(S_k)\,(i\in I)$ 中可以有相同的，又设 $\lambda_0,\lambda_k\ge 0$, $\mu_{0k}\ge 0$, $\mu_{ik}\ge 0$, 并满足

$$\lambda_0+\sum_{k\in K}\lambda_k=1,\qquad \mu_{0k}+\sum_{i\in I}\mu_{ik}=1,\qquad \text{对每一 } k\in K, \tag{8}$$

那么对所有函数 $f(z)\in C^{(\infty)}(\overline{D})$, 有下面积分表示

$$\begin{aligned} f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\Big[&\sum_{|K|\le n}\int_{(\zeta,\lambda)\in S_K\times\Delta_K} f(\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}\Big(\sum_{k\in K}A^{(k)}(\mu,\zeta,z,W)\Big)\wedge \mathrm{d}\zeta\\ &-\sum_{|K|\le n-1}(-1)^{|K|}\int_{\zeta,\lambda)\in S_K\times\Delta_{0K}}\overline{\partial}f(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta,\lambda}(B(\lambda,\mu,\zeta,z,W))\wedge\mathrm{d}\zeta\\ &-\int_{D\times\Delta_0}\overline{\partial}f(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta}\Big(\lambda_0\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta-z|^2}\Big)\wedge\mathrm{d}\zeta\Big],\qquad z\in D, \end{aligned}\tag{9}$$

其中求和是展布在整数 $1\le k_1<k_2<\cdots<k_l\le N$ 的所有严格增加的指标集 $K=(k_1,k_2,\cdots,k_l)$ 上．$|K|=l$, 并分别有 $l\le n$ 和 $l\le n-1$. 又 S_K, Δ_{0K}, Δ_K, Δ_0 为文 [1] 中所定义，而

$$\begin{gathered} A^{(k)}_\alpha(\mu,\zeta,z,W)=\mu_{0k}\frac{W^{(o.k)}_\alpha(\zeta.z)}{\langle\zeta-z,W^{(o,k)}\rangle}+\sum_{i\in I}\mu_{ik}\frac{W^{(i,k)}_\alpha(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W^{(i,k)}\rangle},\\ \alpha=1,2,,\cdots,n.\qquad k\in K,\qquad \zeta\in S_k,\qquad z\in D, \end{gathered}\tag{10}$$

$$B_\alpha(\lambda,\mu,\zeta,z,W)=\lambda_0\frac{\overline{\zeta}_\alpha-z_\alpha}{|\zeta-z|^2}+\sum_{k\in K}\lambda_kA^{(k)}_\alpha(\mu,\zeta,z,W). \tag{11}$$

公式 (9) 可看成是具有逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界的有界域上 Cauchy-Leray 公式的一种拓广式．

证　首先我们把熟知的光滑函数的 B-M 公式 [3,4]

$$f(z)=\int_{\partial D}f(\zeta)\omega(\zeta-z,\overline{\zeta}-\overline{z})-\int_D\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\omega(\zeta-z,\overline{\zeta}-\overline{z}) \tag{12}$$

写成

$$f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\Big[\int_{\partial D}f(\zeta)\omega'_\zeta\Big(\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta-z|^2}\Big)\wedge\mathrm{d}\zeta-\int_D\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\omega'_\zeta\Big(\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta-z|^2}\Big)\wedge\mathrm{d}\zeta\Big].$$

由于在 $(D-z)\times\Delta_0$ 上形式 $\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\omega'_{\zeta,\lambda}(B(\lambda,\mu,\zeta,z,W))\wedge\mathrm{d}\zeta$ 和 $\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\omega'_\zeta(\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta-z|^2})\wedge\mathrm{d}\zeta$ 一致，所以 B-M 公式 (12) 又可写成

$$\begin{aligned} f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\Big[&\int_{\partial D\times\Delta_0}f(\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}(B(\lambda,\mu,\zeta,z,W))\wedge\mathrm{d}\zeta\\ &-\int_{D\times\Delta_0}\overline{\partial}f(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta,\lambda}(B(\lambda,\mu,\zeta,z,W))\wedge\mathrm{d}\zeta\Big]. \end{aligned}\tag{13}$$

其次，由式 (7) 及文 [1] 中引理 1, 据 Stokes 公式，我们有

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_K(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}}\overline{\partial}f(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta,\lambda}(B(\lambda,\mu,\zeta,z,W))l\wedge \mathrm{d}\zeta$$
$$=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\Big[\sum_K\int_{S_K\times\Delta_K}f(\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}(B(\lambda,\mu,\zeta,z,W))\wedge \mathrm{d}\zeta$$
$$-\int_{D\times\Delta_0}f(\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}(B(\lambda,\mu,\zeta,z,W)\wedge \mathrm{d}\zeta\Big]. \tag{14}$$

现将式 (14) 右边的第二个积分用式 (13) 右边的第一个积分代入并移项，则可得

$$f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\Big[\sum_K\int_{S_K\times\Delta_K}f(\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}\Big(\sum_{k\in K}\lambda_kA^{(k)}(\mu,\zeta,z,W)\Big)\wedge \mathrm{d}\zeta$$
$$-\sum_K(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}}\overline{\partial}f(\zeta)\Lambda\omega'_{\zeta,\lambda}(B(\lambda,\mu,\zeta,z,W))\wedge \mathrm{d}\zeta$$
$$-\int_{D\times\Delta_0}\overline{\partial}f(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta}\Big(\lambda_0\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta-z|^2}\Big)\wedge \mathrm{d}\zeta\Big],\quad z\in D. \tag{15}$$

又因为 $\dim_K S_K=2n-|K|$, 而上式右边第一个积分的积分号下的形式关于 ζ 的次数 $\geq n$, 第二个积分的积分号下的形式关于 ζ 的次数 $\geq n+1$, 所以第一积分当 $|K|\geq n+1$ 时为 0, 第二个积分当 $|K|\geq n$ 时为 0, 从而由式 (15) 则可得式 (9) 成立. 定理证毕.

由式 (9), 当 $f(z)$ 为全纯函数时，由于 $\overline{\partial}_\zeta f(z)=0$, 相应则可得到具有逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界的有界域上全纯函数的 Cauchy-Fantappiè 公式的一种拓广式，即

定理 2 条件同定理 1. 设 $\lambda_0\geq 0,\lambda_k\geq 0$, $\mu_{0k}\geq 0$, $\mu_{ik}\geq 0$, 并满足

$$\lambda_0+\sum_{k\in K}\lambda_k=1,\qquad \mu_{0k}+\sum_{i\in I}\mu_{ik}=1,\qquad 对每一 k\in K, \tag{16}$$

那么对于所有在 D 内全纯，在 $\overline{D}$ 上连续的函数 $f(z)$, 有公式

$$f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^2}\sum_{|K|\leq n}\int_{(\zeta,\lambda)\in S_K\times\Delta_K}f(z)\omega'_{\zeta,\lambda}\Big(\sum_{k\in K}\lambda_kA^{(k)}(\mu,\zeta,z,W)\Big)\wedge \mathrm{d}\zeta,\quad z\in D, \tag{17}$$

其中

$$A_\alpha^{(k)}(\mu,\zeta,z,W)=\mu_{0k}\frac{W_\alpha^{(o,k)}(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W^{(o,k)}\rangle}+\sum_{i\in I}\mu_{ik}\frac{W^{(i,k)}(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W^{(i,k)}\rangle}.$$
$$\alpha=1,2,\cdots,n,\ k\in K,\ \zeta\in S_K,\ z\in D. \tag{18}$$

3 一些推论

由公式 (9),(17), 适当选择其中的参数 $\mu_{0k}\geq 0$, $\mu_{ik}\geq 0$, 就可得到具有逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界的有界域上光滑函数的 Cauchy-Leray 公式和全纯函数的 Cauchy-Fantappiè 公式.

首先由公式 (9), 只要取其中

$$\mu_{0k}=0,\qquad \mu_{ik}=\begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i\neq k,\end{cases}\tag{19}$$

即可立得有界域上光滑函数的 Cauchy-Leray 公式，即

推论 1　条件同定理 1, 那么对于所有函数 $f(z)\in C^{(\infty)}(D)$, 有公式

$$\begin{aligned}f(z)=&\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\Big[\sum_{|K|\le n}\int_{(\zeta,\lambda)\in S_K\times\Delta_K}f(\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}\Big(\sum_{k\in K}\lambda_k\frac{W^{(k)}(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W^{(k)}\rangle}\Big)\wedge\mathrm{d}\zeta\\&-\sum_{|K|\le n-1}(-1)^{|K|}\int_{(\zeta,\lambda)\in S_K\times\Delta_{0K}}\overline{\partial}f(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta,\lambda}(E(\lambda,\zeta,z))\wedge\mathrm{d}\zeta\\&-\int_{D\times\Delta_0}\overline{\partial}f(\zeta)\wedge\omega'_\zeta\Big(\lambda_0\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta-z|^2}\Big)\wedge\mathrm{d}\zeta,\qquad z\in D,\end{aligned}\tag{20}$$

其中

$$E_\alpha(\lambda,\zeta,z)=\lambda_0\frac{\overline{\zeta}_\alpha-\overline{z}_\alpha}{|\zeta-z|^2}+\sum_{k\in K}\lambda_k\frac{W^{(k)}_\alpha(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W^{(k)}\rangle},\qquad \alpha=1,2,\cdots,n.\tag{21}$$

证　因为据式 (19) 的取法，这时定理 1 中式 (10),(11) 相应变为

$$A^{(k)}_\alpha(\mu,\zeta,z,W)=\frac{W^{(k)}_\alpha(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W^{(k)}\rangle},\quad \alpha=1,2,\cdots,n,\tag{22}$$

$$B_\alpha(\lambda,\mu,\zeta,z,W)=\lambda_0\frac{\overline{\zeta}_\alpha-\overline{z}_\alpha}{|\zeta-z|^2}+\sum_{k\in K}\lambda_k\frac{W^{(k)}_\alpha(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W^{(k)}\rangle},\tag{23}$$

由此把式 (22),(23) 代入公式 (9), 即可立得式 (20) 成立．证毕．

同理由公式 (17), 只要选取其中

$$\mu_{0k}=0,\qquad \mu_{ik}=\begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i\neq k,\end{cases}$$

即可立得有界域上全纯函数的 Cauchy-Fantappiè 公式 [5], 即

推论 2　条件同定理 1, 则对于所有在 D 内全纯，$\overline{D}$ 上连续的函数 $f(z)$, 有公式

$$f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{|K|\le n}\int_{(\zeta,\lambda)\in S_K\times\Delta_K}f(\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}\Big(\sum_{k\in K}\lambda_k\frac{W^{(k)}(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W^{(k)}\rangle}\Big)\wedge\mathrm{d}\zeta.\tag{24}$$

证法同推论 1.

显然由公式 (9), 公式 (17), 适当选取其中参数 $\mu_{0k}\ge 0$, $\mu_{ik}\ge 0$ 和向量函数 $W^{(0,k)}$, $W^{(i,k)}$, $i\in I$, $k\in K$. 我们还可以得出具有这种逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界的其他一些区域上光滑函数和全纯函数种种已有的积分公式和它们的拓广式以及一些新的公式．例如：

(I) 若在公式 (9),(10) 中取向量

$$W^{(0,k)}(\zeta,z)=(\overline{\zeta}-\overline{z})|\zeta-z|^{k-1},$$

$$W^{(i,k)}(\zeta,z)=(\overline{\zeta}-\overline{z})|\zeta-z|^{(k+i)-2},$$

则可得到有界域上，对所有函数 $f(z)\in C^{(\infty)}(\overline{D})$ 都成立的一新的积分公式

$$\begin{aligned}f(z)=&\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\Big[\sum_{|K|\le n}\int_{(\zeta,\lambda)\in S_K\times\Delta_K}f(\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}\Big(\sum_{k\in K}\lambda_kH^{(k)}(\mu,\zeta,z)\Big)\wedge\mathrm{d}\zeta\\&-\sum_{|K|\le n-1}(-1)^{|K|}\int_{(\zeta,\lambda)\in S_K\times\Delta_{0K}}\overline{\partial}f(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta,\lambda}(E(\lambda,\mu,\zeta,z))\wedge\mathrm{d}\zeta\\&-\int_{D\times\Delta_0}\overline{\partial}f(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta}\Big(\lambda_0\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta-z|^2}\Big)\wedge\mathrm{d}\zeta\Big],\qquad z\in D,\end{aligned}\tag{25}$$

其中

$$H_\alpha^{(k)}(\mu,\zeta,z)=\mu_{0k}\frac{(\overline{\zeta}_\alpha-\overline{z}_\alpha)|\zeta_\alpha-z_\alpha|^{k-1}}{\sum\limits_{j=1}^n|\zeta_j-z_j|^{k+1}}+\sum_{i\in I}\mu_{ik}\frac{(\overline{\zeta}_\alpha-\overline{z}_\alpha)|\zeta_\alpha-z_\alpha|^{(k+i)-2}}{\sum\limits_{j=1}^n|\zeta_j-z_j|^{k+i}},$$

$$E_\alpha(\lambda,\mu,\zeta,z)=\lambda_0\frac{\overline{\zeta}_\alpha-\overline{z}_\alpha}{|\zeta-z|^2}+\sum_{k\in K}\lambda_kH_\alpha^{(k)}(\mu,\zeta,z).$$

(II) 又如，在公式 (10) 中，令

$$\mu_{0k}=a,\qquad \mu_{ik}=\begin{cases}b, & i=k,\\ 0, & i\ne k,\end{cases}\qquad a\ge 0,\ b\ge 0,\ 且\ a+b=1.$$

又在式 (9),(10) 中取向量 $W^{(0,k)}(\zeta,z)$ 为文 [2] 中 G.M.Khenkin 和 J.leiterer 所引进的具有逐块光滑边界的强拟凸域上的支撑函数 $\frac{p^{(k)}(\zeta,z)}{\Phi^{(k)}(\zeta,z)}$ 中的函数 $p^{(k)}(\zeta,z)$ 即 $W^{(0,k)}(\zeta,z)=p^{(k)}(\zeta,z)$，其中 $\Phi^{(k)}(\zeta,z)=\sum\limits_{j=1}^n(\zeta_j-z_j)p_j^{(k)}(\zeta,z)$. 同时在公式 (9),(10) 中取向量函数

$$W^{(i,k)}(\zeta,z)=\begin{cases}(\overline{\zeta}-\overline{z})|\zeta-z|^k, & i=k,\\ 0, & i\ne k,\end{cases}$$

则可得到强拟凸域上有别于已有公式的一种新的积分公式，即：设 $f(z)$ 是强拟凸域 $\overline{D}$ 上连续的函数，使得形式 $\overline{\partial}f$ 在 $\overline{D}$ 上还是连续的，则有

$$\begin{aligned}f(z)=&\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\Big[\sum_{|K|\le n}\int_{(\zeta,\lambda)\in S_K\times\Delta_K}f(\zeta)\omega'_{\zeta,\lambda}\Big(\sum_{k\in K}\lambda_kG^{(k)}(\zeta,z)\Big)\wedge\mathrm{d}\zeta\\&-\sum_{|K|\le n-1}(-1)^{|K|}\int_{(\zeta,\lambda)\in S_K\times\Delta_{0K}}\overline{\partial}f(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta,\lambda}(L(\lambda,\zeta,z))\wedge\mathrm{d}\zeta\\&-\int_{D\times\Delta_0}\overline{\partial}f(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta}\Big(\lambda_0\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta-z|^2}\Big)\wedge\mathrm{d}\zeta\Big],\qquad z\in D,\end{aligned}\tag{26}$$

其中

$$G_\alpha^{(k)}(\zeta,z)=a\frac{p^{(k)}(\zeta,z)}{\Phi^{(k)}(\zeta,z)}+b\frac{(\overline{\zeta}_\alpha-\overline{z}_\alpha)|\zeta-z|^k}{\sum_{j=1}^{n}|\zeta_j-z_j|^{k+2}},$$

$$a\ge 0,\ b\ge 0,\ \text{且}\ a+b=1.\ \alpha=1,2,\cdots,n,$$

$$L_\alpha(\lambda,\zeta,z)=\lambda_0\frac{\overline{\zeta}_\alpha-\overline{z}_\alpha}{|\zeta-z|^2}+\sum_{k\in K}\lambda_k G_\alpha^{(k)}(\zeta,z).$$

参　考　文　献

[1] 姚宗元．$\mathbb{C}^n$ 空间中具有逐光滑边界的有界域上光滑函数的一种积分表示．厦门大学学报 (自然科学版), 1993, **32**(5): 528–532.

[2] 钟同德，黄沙编著．多元复分析．石家庄：河北教育出版社， 1990.

[3] 姚宗元．$\mathbb{C}^n$ 空间中有界域上的一个积分公式．中国科学， 1992, **22**(1): 1–10.

[4] Bochner S. Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula. *Ann. of Math.* 1943, **44**: 652–673.

[5] Leray L. Le Calcul differentiel et intègral sur une variété analytigue complexe (Problèm de Cauchy, iii). *Bull. Soc. Math. France*, 1959, **87**: 81–180.

EXTENDED FORMS OF C-L FORMULA AND C-F FORMULA ON BOUNDED DOMAIN WITH PIECEWISE SMOOTH BOUNDARY IN $\mathbb{C}^n$

Yao Zongyuan

(*Department of Mathematics, Xiamen University, Xiamen* 361005)

Abstract An abstract integral formula of smooth functions on bounded domain with piecewise smooth boundary in $\mathbb{C}^n$ is obtained, the characteristic property of which is that the integral kernel contains a series of vector functions $W^{(0,k)}(s,z)$, $W^{(i,k)}(\zeta,z)$ and a series of independent real parameters $\mu_{0k}\ge 0$, $\mu_{ik}\ge 0$. From this formula, when the proper parameter μ_{ik} and vector function W are chosen, we can obtain Cauchy-Leray formula of smooth functions, Cauchy-Fantappiè formula of holomorphic functions and some other new formulas on bounded domain with piecewise $C^{(1)}$ smooth boundary.

Key words Cauchy-Leray formula, Canchy-Fantappiè formula, extended forms, bounded domain.