第 42 卷 第 1 期
2003 年 1 月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol. 42 No. 1
Jan. 2003

文章编号: 0438-0479(2003) 01-0009-03

点可迁图的顶点划分

欧见平, 张福基
(厦门大学数学系, 福建 厦门 361005)

摘要: 设 G 是 k 正则连通点可迁图. 图 G 的一个边割 S 称为限制性边割, 如果 $G-S$ 不含孤立点. 最小限制性边割所含的边数 λ' 称为限制性边连通度. 已经证明 $\lambda' \leqslant 2k-2$. 等号成立时, 称图 G 是极大限制性边连通的. 本文证明了: 如果 G 不是极大限制性边连通的, 那么 G 的顶点集存在一个划分 $\pi = (C_1, \cdots, C_m)$, 使得由 C_h 导出的子图同构于一个连通 $k-1$ 正则点可迁图 H, $h = 1, 2, \cdots, m$, 而且 $k \leqslant |H| \leqslant 2k-3$.

关键词: 点可迁图; 顶点划分; 限制性边割; 限制性断片
中图分类号: O 175.5 文献标识码: A

1 基本概念

未特别声明, 本文所指的图都是简单、连通的 k 正则点可迁图, 其中 $k \geqslant 2$. 设 S 是连通图 G 的一个边割, 如果 $G-S$ 不含孤立点, 那么称 S 是图 G 的限制性边割. 图 G 的最小限制性边割所含的边数称作它的限制性边连通度, 记为 $\lambda'(G)$. 设 X 是图 G 的一个子图或者顶点子集, $G \setminus X$ 表示从 G 中删去 X 的所有顶点后得到的图. 用 $d(X)$ 表示端点分别在 X 和 $G \setminus X$ 中的边的数目, 称 $\xi(G) = \min\{d(X): X$ 是 G 的 2 阶连通子图$\}$ 为图 G 的最小边度. Esfahanian 等在文献[1] 中证明了:

$$\lambda'(G) \leqslant \xi(G) = 2k-2$$

如果上述不等式中的等号成立, 则称 G 是极大限制性边连通的. 图 G 的 k 因子是它的一个 k 正则生成子图. 如果对于 G 的任意两个顶点 u 和 v 都存在 $g \in \mathrm{Aut}(G)$ 使得 $g(u) = v$, 则称 G 是点可迁的图, 其中 $\mathrm{Aut}(G)$ 是 G 的自同构群. 我们发现点可迁图有以下优美的结构.

定理 设 G 是一个 k 正则连通点可迁图. 如果 G 不是极大限制性边连通的, 那么 G 的顶点集存在一个划分 $\pi = (C_1, \cdots, C_m)$, 使得由 C_h 导出的子图同构于一个连通 $k-1$ 正则点可迁图 H, $h = 1, 2, \cdots, m$. H 的阶不小于 k, 不大于 $2k-3$.

定理的一个直接结果是: 如果 G 不是极大限制性边连通的, 那么 G 含有一个 $k-1$ 因子 H; H 的各个分支都同构于同一个阶大于或者等于 k 而小于或者等于 $2k-3$ 的点可迁图. 此结果加强并推广了 Watkins[2], Jan van den Heuvel 和 Bill Jacson[3] 所得到的相应结论. 前者称如果 k 正则连通点可迁图 G 不是 k 连通的, 那么它有一个因子 F, F 的各分支都同构一个点可迁图. 后者称如果连通点可迁图 G 有一个阶小于 $2(k+1)^2/9$ 的边割 S 使得 $G-S$ 的各个分支的阶都不小于 $(k+1)/3$, 那么 G 有因子 F, F 的各个分支都同构于一个点可迁图.

设 S 是图 G 的一个最小限制性边割, 那么 $G-S$ 只含两个连通分支, 称这两个分支为 S 对应的限制性断片, 简称断片, 其中顶点较少的断片称为正规断片. 值得注意的是, 此处的断片都对应一个最小限制性边割, 并且是成对出现的连通点导出子图, 这一点与传统意义上的断片有本质上的差异. 如果我们将一个限制性断片记为 X, 则另一个相应的断片记为 X^c. 在不引起混淆时, 用限制性断片的顶点集表示这个断片. 最小限制性断片称为限制性原子, 或者简称原子. 原子显然是正规断片. 设 A 和 B 是 $V(G)$ 的两个子集, 用 $[A, B]$ 表示端点分别在 A 和 B 中的边所组成的集合, $[A, G \setminus A]$ 略记为 $I(A)$. 易见, $|I(A)| = d(A)$. 用 $\lambda(G)$ 表示 G 的连通度. 其余未加说明的符号和术语, 请参考文献[4].

收稿日期: 2002-03-26
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19971071)
作者简介: 欧见平 (1965-), 男, 博士研究生.
E-mail: oujp@263.net.

2 断片的性质

由于 2 正则连通点可迁图是一个圈, 从而是极大限制性边连通的, 因此以下只考虑当 $k \geqslant 3$ 时的 k 正则连通点可迁图.

引理 2.1[5] 连通 k 正则点可迁图是 k 边连通的.

引理 2.2 设 X 和 Y 是图 G 的两个不相同限制性断片. 如果以下两个条件成立, 那么 $X \cap Y$ 也是限制性断片.

(1) $|X \cap Y| \geqslant 2$.

(2) $d(X \cap Y) \leqslant \lambda'(G)$.

证明 设 X 和 Y 分别是最小限制性边割 S 和 T 所对应的断片. 令

$A = X \cap Y$, $B = X \cap Y^c$, $C = X^c \cap Y$,

$D = X^c \cap Y^c$

由于 $|X \cap Y| \geqslant 2$, $|X^c \cup Y^c| \geqslant |X^c| \geqslant 2$, 所以只须证明 $X \cap Y$ 和 $X^c \cup Y^c$ 都是连通的.

(a) $X^c \cup Y^c$ 是连通的.

由于 X^c 和 Y^c 都是限制性断片, 它们都是连通的. 这意味着, 当 D 不是空集时, 命题(a) 是成立的. 当 D 是空集时, 如果 $[B, C]$ 也是空集, 那么

$$d(A) = |[A, B]| + |[A, C]| = |S| + |T| = 2\lambda'(G) > \lambda'(G)$$

这与条件(2) 相互矛盾. 因此, 当 D 是空集时, $[B, C]$ 不可能是空集. 又因为此时 $B = Y^c$ 和 $C = X^c$ 都是连通的, 所以命题(a) 在此情形下仍然成立.

(b) $X \cap Y$ 是连通的.

假设 A 不连通, A_i 是 A 的连通分支, 其中 $i = 1, 2, \cdots, m$, $m \geqslant 2$. 据引理 2.1 知, 对所有的 $i = 1, 2, \cdots, m$ 都有 $d(A_i) \geqslant \lambda(G) = k$. 又因为 $I(A) = I(A_1) \cup \cdots \cup I(A_m)$, 所以

$$2k - 2 \geqslant \lambda'(G) \geqslant d(A) = \sum_{i=1}^{m} d(A_i) \geqslant 2\lambda(G) = 2k$$

矛盾.

引理 2.3 设 X 和 Y 是图 G 的两个不相同的正规断片. 如果 $|X \cap Y| \geqslant 2$, 那么 $X \cap Y$ 也是断片.

证明 设 S 和 T 是分别对应于 X 和 Y 的最小限制性边割. 如果像在引理 2.2 的证明中那样定义 A, B, C 和 D, 那么根据引理 2.2, 只须证明 $\lambda'(G) \geqslant d(A)$. 而这一点可由以下 3 个命题得到.

(1) $|D| \geqslant |A| \geqslant 2$

由于 X 和 Y 是两个正规断片, 它们所含的顶点数不超过 $|G|/2$, 所以

$$|A| + |C| = |Y| \leqslant |G|/2 \leqslant |X^c| = |C| + |D|$$

抵消上式左右两端的 $|C|$ 即得命题(1).

(2) $d(D) \geqslant \lambda'(G)$

由于 X 和 Y 都是连通的限制性断片, 所以 D^c 是阶不小于 2 的连通子图. 如果 D 连通, 那么根据命题(1) 知 $I(D)$ 是限制性边割, 从而命题(2) 成立; 如果 D 不连通, 则 $I(D)$ 含有至少两个不相交的边割. 据引理 2.1, 这两个边割都含有至少 k 条边. 所以

$$d(D) \geqslant 2\lambda(G) = 2k > \lambda'(G)$$

(3) $\lambda'(G) \geqslant d(A)$

因为

$$d(A) + d(D) = |[A, C]| + |[A, B]| + |[D, C]| + |[D, B]| + 2|[A, D]| + 2|[B, C]| - 2|[B, C]| \leqslant |[A, C]| + |[A, B]| + |[D, C]| + |[D, B]| + 2|[A, D]| + 2|[B, C]| = |S| + |T| = 2\lambda'(G)$$

结合命题(2) 即得命题(3).

引理 2.4 设 X 和 Y 是图 G 的两个不相同的原子. 那么 $|X \cap Y| \leqslant 1$.

证明 如果 $X \cap Y$ 含有至少两个顶点, 那么根据引理 2.3 得知它是限制断片. 但是 $X \cap Y$ 所含的顶点比 X 和 Y 都少, 因而是它们的真子集. 这与 X 和 Y 都是原子这一条件相矛盾. 因此引理成立.

引理 2.5 设 X 和 Y 是两个不同原子. 如果 G 不是极大限制性边连通的, 那么 $X \cap Y$ 是空集.

证明 由于 G 不是极大限制性边连通的, 所以

$\lambda'(G) < 2k - 2 = \xi(G)$ 且 $|X| = |Y| \geqslant 3$

假如 $X \cap Y$ 不是空集, 那么据引理 2.4 有: $1 \geqslant |X \cap Y| = |A|$. 定义 A, B, C 和 D 同前. 因为

$$|A| + |B| = |X| = |Y| = |A| + |C| \geqslant 3$$

所以

$$|B| = |C| \geqslant 2 \tag{1}$$

由于

$$d(B) + d(C) = |[A, B]| + |[B, C]| + |[B, D]| + |[A, C]| + |[B, C]| + |[D, C]| \leqslant |[A, B]| + |[B, C]| + |[C, D]| + |[A, D]| + |[A, C]| + |[B, C]| + |[B, D]| + |[A, D]| \leqslant |T| + |S| = 2\lambda'(G)$$

所以

$$d(B) \leqslant \lambda'(G) \text{ 或者 } d(C) \leqslant \lambda'(G) \qquad (2)$$

结合式(1), (2) 及引理 2.2 知, B 或者 C 是限制性断片. 从而 X 或者 Y 含有真子断片. 矛盾.

引理 2.6　设 X 是 G 的原子. 如果 G 不是极大限制性边连通的, 那么 X 是点可迁的.

证明　由于 G 是点可迁图, 所以对于 X 中的任意两点 u 和 v, 总存在自同构 $g \in \mathrm{Aut}(G)$ 使得 $g(u) = v$. 由于 $g(X)$ 也是 G 的原子, 而且 $g(X) \cap X$ 不是空集, 所以根据引理 2.5 知 $g(X) = X$. 从而 g 在 X 上的限制 $g|X$ 是 X 的一个自同构. 故 X 是点可迁图.

3　主要结果

定理 3.1　设 G 是 k 正则连通点可迁图. 如果 G 不是极大限制性边连通的, 那么 G 的顶点集存在一个划分 $\pi = (C_1, \cdots, C_m)$, 使得由 C_h 导出的子图同构于一个连通 $k-1$ 正则点可迁图 H, $h = 1, 2, \cdots, m$. H 的阶不小于 k, 不大于 $2k-3$.

证明　设 X 是图 G 的任意一个原子, 据引理 2.6 知 X 是点可迁图, 因而可设它是 r 正则的. 由于 $I(X)$ 是限制性边割, 而且 G 不是极大限制性边连通的, 所以 $0 < r < k$ 且 $|X| > 2$. 因而

$$2k-2 > \lambda'(G) = d(X) = k|X| - \sum_{u \in X} d_X(u) \geqslant k|X| - |X|(|X|-1)$$

其中 $d_X(u)$ 表示点 u 在 X 中的邻点数. 化简上式得

$$(|X|-2)(|X|-(k-1)) > 0$$

由于 $|X| - 2 > 0$, 所以

$$|X| \geqslant k$$

由此可得

$$2k-2 > \lambda'(G) = d(X) = k|X| - r|X| = (k-r)|X| \geqslant (k-r)k$$

因为 $0 < k-r < k$, 所以有

$$r = k-1$$

综合上述最后两个公式可知, X 是一个 $k-1$ 正则图, 并且它的阶介于 k 和 $2k-3$ 之间. 因为对任意 $g \in \mathrm{Aut}(G)$, 或者 $g(X) = X$, 或者 $g(X) \cap X$ 是空集, 所以 $\{g(X): g \in \mathrm{Aut}(G)\}$ 构成 $V(G)$ 的一个划分并且满足定理的条件. 定理证毕.

参考文献:

[1] Esfahanian A H, Hakimi S L. On computing a conditional edge-connectivity of a graph[J]. J. Information Processing Letters, 1988, 27: 195-199.

[2] Watkins M E. Connectivity of transitive graphs[J]. J. Combin Theory Ser B, 1970, 8: 23-29.

[3] Jan van den Heuvel, Bill Jacson. On the edge connectivity, hamiltonicity, and toughness of vertex-transitive graphs[J]. J. Combin. Theory Ser B, 1999, 77: 138-149.

[4] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications [M]. London: Macmillan Press, 1976.

[5] Mader W. Minimale n-fach kantenzusammenhÝngende graphen[J]. Math Ann., 1971, 191: 21-28.

Partition of Vertex Transitive Graphs

OU Jian-ping, ZHANG Fu-ji

(Dept. of Mathematics, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: Let G be a connected k-regular vertex transitive graph. An edge cut S of G is called a restricted edge cut if $G-S$ contains no isolated vertex. The cardinality λ' of minimum restricted edge cut is called restricted edge connectivity. It is known that $\lambda' \leqslant 2k-2$. A graph G is maximal restricted edge connected if $\lambda' = 2k-2$. We prove in this paper that if G is not maximal restricted edge connected, then there is a vertex partition $\pi = (C_1, \cdots, C_m)$ in G such that $G[C_h]$ is isomorphic to a connected $(k-1)$-regular vertex transitive graph H with order between k and $2k-3$ for all $h = 1, 2, \cdots, m$.

Key words: vertex transitive graph; vertex partition; restricted edge cut; restricted fragment