第 42 卷　第 5 期
2003 年 9 月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol. 42　No. 5
Sep. 2003

文章编号: 0438-0479(2003)05-0570-03

α-双对角占优与 H 矩阵的判定

汪　祥, 卢琳璋
(厦门大学数学系, 福建 厦门 361005)

摘要: 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若 $\exists\alpha\in[0,1]$, 使对 $\forall i\neq j(i,j\in N)$ 均有 $|a_{ii}a_{jj}|\geq(\Lambda_i\Lambda_j)^{\alpha}(S_iS_j)^{1-\alpha}$, 则称 A 为 α- 双对角占优矩阵. 本文利用矩阵回路给出了 A 为 H 阵的新的判定准则, 即 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若对任意 $i\in N$ 和 $v\in S(A)$ 有: $\prod_{i\in v}|a_{ii}|>(\prod_{i\in v}\Lambda_i)^{\alpha}(\prod_{i\in v}S_i)^{1-\alpha}$, $\alpha\in[0,1]$, 则 A 为 H 阵, 改进和推广了已有的结果.

关键词: 回路; α- 对角占优; α- 双对角占优; H 矩阵
中图分类号: O 241.6　　文献标识码: A

1　记号和定义

H 矩阵在矩阵理论和计算的研究中非常重要, 因此讨论 H 矩阵的判定和性质有着重要的意义. 文献[1～5] 利用 α- 对角占优、双对角占优概念给出了一些 H 阵的判别准则. 本文推广了这些概念给出更广的判别准则.

本文记 $N=\{1,2,\cdots,n\}$.

定义 1　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, $M(A)=(m_{ij})\in C^{n\times n}$, 其中 $i\neq j$ 时 $m_{ij}=-|a_{ij}|$, $i=j$ 时 $m_{ij}=|a_{ij}|$, 称 $M(A)$ 为 A 的比较矩阵; 若 $M(A)$ 为非奇异的 M 阵, 则称 A 为 H 阵.

定义 2　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若存在正对角阵 D 使得 AD 为严格对角占优矩阵, 则称 A 为广义严格对角占优矩阵.

定义 3　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 记 $\Lambda_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$, $S_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ji}|$(在不引起误解的情况下分别简记为 Λ_i 和 S_i), 若对任意的 $i\in N$ 皆有

$$|a_{ii}|>\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha},\ \text{其中}\ \alpha\in[0,1],$$

则称 A 为严格 α- 对角占优矩阵.

定义 4　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若对任意的 $i\in N$ 皆有

$$|a_{ii}|\geq\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha},\ \text{其中}\ \alpha\in[0,1],$$

且对任意使得 $|a_{ii}|=\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}$ 的 $i\in N$, A 中都存在非零元素链与 j 相连接, 其中 $j\in J=\{j\in N\mid |a_{jj}|>\Lambda_j^{\alpha}S_j^{1-\alpha}\}\neq\Phi$, 则称 A 为具有非零元素链的 α- 对角占优矩阵.

定义 5　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若对任意的 $i\neq j(i,j\in N)$ 皆有

$$|a_{ii}a_{jj}|\geq\Lambda_i\Lambda_j \tag{1}$$

则称 A 为双对角占优矩阵; 若式(1) 中每一不等号都是严格的, 则称 A 为严格双对角占优矩阵.

定义 6　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若对任意的 $i\neq j(i,j\in N)$ 皆有

$$|a_{ii}a_{jj}|\geq(\Lambda_i\Lambda_j)^{\alpha}(S_iS_j)^{1-\alpha},\ \text{其中}\ \alpha\in[0,1] \tag{2}$$

则称 A 为 α-双对角占优矩阵; 若式(2) 中每一不等号都是严格的, 则称 A 为严格 α- 双对角占优矩阵.

定义 7　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 的有向图为 $\Gamma(A)$, 若 $a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_ti_1}\neq 0$, $t\geq 2$, $i_1,i_2,\cdots,i_t$ 互不相同, 则称 $\Gamma(A)$ 的顶点 $i_1,i_2,\cdots,i_t$ 构成一个回路, 记作 v.

下面用 $i\in v$ 表示 i 是回路 v 上的一个顶点, 并且用 $S(A)$ 表示 $\Gamma(A)$ 中全体回路的集合.

定义 8　记实值函数的 $n(\geq 2)$ 组数 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ 的全体为 $\mathcal{F}_n$, 其中 $f_i: C^{n\times n}\to R^{+}$ 且只与矩阵非对角元的模有关, 若 $f\in\mathcal{F}_n$ 满足对 $|a_{ii}|>f_i(A)$, $i\in N$ 的每个 $A\in C^{n\times n}$ 皆为非奇异的, 则称 f 为 G 函数[2].

收稿日期: 2002-11-12
基金项目: 国家自然科学基金(10271099)资助
作者简介: 汪祥(1980—), 男, 硕士研究生.

2　主要结果

引理 1[1]　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若 A 为严格 α-对角占优矩阵则 A 为广义严格对角占优阵.

引理 2[1]　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若 A 为具有非零元素链的 α-对角占优矩阵则 A 为广义严格对角占优阵.

引理 3　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，$f_i(A)=\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}$，$\alpha\in[0,1]$，$i\in N$，则 $f(A)=(f_1(A),f_2(A),\cdots,f_n(A))$ 是 G 函数.

证明　对任意 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若 $|a_{ii}|>f_i(A)=\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}$，$\alpha\in[0,1]$，$i\in N$，则由引理 1 知 A 为广义严格对角占优阵，从而 $\det A\neq 0$，故由 G 函数定义知 $f(A)=(f_1(A),f_2(A),\cdots,f_n(A))$ 为一个 G 函数.

引理 4[2]　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若 $f(A)=(f_1(A),f_2(A),\cdots,f_n(A))$ 为一个 G 函数，且对任意 $v\in S(A)$，$\prod\limits_{i\in v}|a_{ii}|>\prod\limits_{i\in v}f_i(A)$，则 $M(A)$ 为非奇 M 阵.

定理 1　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若对任意 $i\in N$ 和 $v\in S(A)$ 有:

$$\prod_{i\in v}|a_{ii}|>\Big(\prod_{i\in v}\Lambda_i\Big)^{\alpha}\Big(\prod_{i\in v}S_i\Big)^{1-\alpha},\ \alpha\in[0,1] \tag{3}$$

则 A 为 H 阵.

证明　记 $f_i(A)=\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}$，$i\in N$，由引理 3 知 $f(A)=(f_1(A),f_2(A),\cdots,f_n(A))$ 为一个 G 函数，由式(3)可得

$$\prod_{i\in v}|a_{ii}|>\Big(\prod_{i\in v}\Lambda_i\Big)^{\alpha}\Big(\prod_{i\in v}S_i\Big)^{1-\alpha}=\prod_{i\in v}f_i(A)$$

从而由引理 4 知 A 为 H 阵.

注　易知文献[3]的定理 1.2 和文献[4]的定理 1 即为本文定理 1 的特例(取 $\alpha=1$ 即可).

推论 1　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若 A 为严格 α-双对角占优矩阵，则 A 为 H 阵.

证明　由定义 5 知 $|a_{ii}a_{jj}|>(\Lambda_i\Lambda_j)^{\alpha}(S_iS_j)^{1-\alpha}$，对 $\forall i\neq j(i,j\in N)$，$\alpha\in[0,1]$，从而易证得: $\prod\limits_{i\in v}|a_{ii}|>\Big(\prod\limits_{i\in v}\Lambda_i\Big)^{\alpha}\Big(\prod\limits_{i\in v}S_i\Big)^{1-\alpha}=\prod\limits_{i\in v}f_i(A)$，对 $\forall v\in S(A)$，于是由定理 1 知 A 为 H 阵.

注　当 $\alpha=1$ 时，文献[5]的定理 2 即本文推论 1.

定理 2　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若对 $\forall i\in N$，$a_{ii}\neq 0$，$\forall v\in S(A)$ 恒有

$$\prod_{i\in v}|a_{ii}|\geqslant\Big(\prod_{i\in v}\Lambda_i\Big)^{\alpha}\Big(\prod_{i\in v}S_i\Big)^{1-\alpha},\ \alpha\in[0,1] \tag{4}$$

$J=\{i\in v\mid\prod\limits_{i\in v}|a_{ii}|>\Big(\prod\limits_{i\in v}\Lambda_i\Big)^{\alpha}\Big(\prod\limits_{i\in v}S_i\Big)^{1-\alpha},v\in S(A)\}\neq\Phi$，且对 $\forall i\in N\setminus J$，$A$ 中都有非零元素链 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_lj}\neq 0$ 使 $j\in J$，则 A 为 H 阵.

证明　记 $f_i(A)=\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}$，$i\in N$，则由引理 3 知 $f(A)=(f_1(A),f_2(A),\cdots,f_n(A))$ 为一个 G 函数，由(4)知 $\prod\limits_{i\in v}|a_{ii}|\geqslant\Big(\prod\limits_{i\in v}\Lambda_i\Big)^{\alpha}\Big(\prod\limits_{i\in v}S_i\Big)^{1-\alpha}=\prod\limits_{i\in v}f_i(A)$，再由定理条件及文献[4]的定理 2 知 A 为 H 阵.

注　显然本文定理 2 推广了文献[4]中的定理 2.

推论 2　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，$A$ 不可约且对 $\forall i\in N$，$a_{ii}\neq 0$，$\forall v\in S(A)$ 有

$\prod\limits_{i\in v}|a_{ii}|\geqslant\Big(\prod\limits_{i\in v}\Lambda_i\Big)^{\alpha}\Big(\prod\limits_{i\in v}S_i\Big)^{1-\alpha}$，$\alpha\in[0,1]$ 且 $J\neq\Phi$，

其中 J 的定义同定理 2，则 A 为 H 阵.

定理 3　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，$A$ 为 α-双对角占优矩阵，若对每一(i,j)满足 $|a_{ii}a_{jj}|=(\Lambda_i\Lambda_j)^{\alpha}(S_iS_j)^{1-\alpha}$，$(i\neq j\in N)$，$A$ 中都有一条非零元素链 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_lj^{\#}}\neq 0$ 或 $a_{ji_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_lj^{\#}}\neq 0$ 使 $j^{\#}\in J(A)=\{j\in N\mid|a_{ii}a_{jj}|>(\Lambda_i\Lambda_j)^{\alpha}(S_iS_j)^{1-\alpha},\ \forall i\in N,i\neq j\}\neq\Phi$，则 A 为 H 阵.

证　Ⅰ) 若对每一个 $i\in N$ 都有 $|a_{ii}|>\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}$，则对 $\forall j\in J(A)$ 均有 $|a_{jj}|>\Lambda_j^{\alpha}S_j^{1-\alpha}$，此时定理 3 的条件即保证了 A 为具有非零元素链的 α-对角占优矩阵，从而由引理 2 知 A 为 H 阵.

Ⅱ) 若Ⅰ的情况不存在，则有且仅有一个 $i\in N$(不妨设 $i=1$)使得

$|a_{11}|<\Lambda_1^{\alpha}S_1^{1-\alpha}$，

且当 $1<j\leqslant n$ 时有

$|a_{jj}|>\Lambda_j^{\alpha}S_j^{1-\alpha}$，

事实上，若 $\exists i\neq j,i,j\in N$，使得 $|a_{ii}|<\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}$ 且 $|a_{jj}|<\Lambda_j^{\alpha}S_j^{1-\alpha}$，则 $|a_{ii}a_{jj}|<(\Lambda_i\Lambda_j)^{\alpha}(S_iS_j)^{1-\alpha}$，这与 A 为 α-双对角占优矛盾.

令 $d=\Lambda_1^{\alpha}S_1^{1-\alpha}/|a_{11}|$，则 $d>1$，又令 $D=\mathrm{diag}(d,1,\cdots,1)$，考查矩阵 $B=DAD=(b_{ij})$:

$|b_{11}|=d^2|a_{11}|=$

$d\Lambda_1^{\alpha}S_1^{1-\alpha}=[\Lambda_1(B)]^{\alpha}[S_1(B)]^{1-\alpha}$，

当 $1<j\leqslant n$，$|b_{jj}|=|a_{jj}|$，所以有

$|b_{jj}b_{11}|=d^2|a_{jj}a_{11}|\geqslant d^2(\Lambda_1\Lambda_j)^{\alpha}(S_1S_j)^{1-\alpha}=$

$d(d\Lambda_1\Lambda_j)^{\alpha}(dS_1S_j)^{1-\alpha}=$

$$d[\Lambda_1(B)\Lambda_j(A)]^{\alpha}[S_1(B)S_j(A)]^{1-\alpha}=$$
$$[d\Lambda_1(B)\Lambda_j(A)]^{\alpha}[dS_1(B)S_j(A)]^{1-\alpha}\geqslant$$
$$[\Lambda_1(B)\Lambda_j(B)]^{\alpha}[S_1(B)S_j(B)]^{1-\alpha},$$

(注:最后一个不等式成立是因为 $d\Lambda_j(A)\geqslant d\,|a_{j1}|+\sum_{i\neq j,\,i\neq 1}|a_{ji}|=\Lambda_j(B)$,同理可证得 $dS_j(A)\geqslant S_j(B)$)由 $J(A)\neq\Phi$ 及 $|a_{11}|<\Lambda_1^{\alpha}S_1^{1-\alpha}$ 知至少存在一个 $j\in N$ 使得 $|a_{jj}|>\Lambda_j^{\alpha}S_j^{1-\alpha}$.故由非零元素链的条件知 B 为具有非零元素链的 α-对角占优矩阵,由引理2知 B 为广义严格对角占优阵,从而 A 为 H 阵.

推论3 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,$A$ 为 α-双对角占优矩阵且 A 不可约,若 $J(A)\neq\Phi$(其中定义同定理3),则 A 为 H 阵.

参考文献:

[1] Sun Yuxiang. An improvement on a theorem by Ostrowski and ts applications[J]. Northeastern Math. J., 1991, 7(4): 497—502.

[2] 陈公宁.矩阵理论与应用[M].北京:高等教育出版社, 1990.

[3] Li Bishan, Tsatsomeros M J. Doubly diagonally dominant matrices[J]. Linear Algebra Appl, 1997, 261: 221—235.

[4] 孙玉祥.广义严格对角占优矩阵与非奇异 M-矩阵的判定[J].厦门大学学报(自然科学版), 2001, 9(5): 1 011—1 016.

[5] 安国斌,郭希娟.双对角占优与非奇 M 阵的判定[J].应用数学与计算数学学报, 2000, 14(2): 93—96.

α-Doublly Diagonally Dominant and the Criterions for H-Matrices

WANG Xiang, LU Lin-zhang

(Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005 China)

Abstract: Let $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$. If these exists $\alpha\in[0,1]$ for all $i\neq j\ (i,j\in N)$, we have $|a_{ii}a_{jj}|\geqslant(\Lambda_i\Lambda_j)^{\alpha}(S_iS_j)^{1-\alpha}$, and then A is an α-doubly diagonally dominant matrix. In this paper, we obtain a new criterion for H-matrices in terms of matrix circuit, i.e. if for any $i\in N$ and $v\in S(A)$, we have $\prod_{i\in v}|a_{ii}|>(\prod_{i\in v}\Lambda_i)^{\alpha}(\prod_{i\in v}S_i)^{1-\alpha}$, $\alpha\in[0,1]$, and then A is an H-matrix, improving and generalizing the related results.

Key words: circuit; α-diagonally dominant; α-doublly diagonally dominant; Non-singular H-matrix