第 42 卷　第 5 期
2003 年 9 月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol. 42　No. 5
Sep. 2003

文章编号: 0438-0479(2003)05-0548-04

有限生成的上约化的Gorenstein 平坦模

陈 正 新
(厦门大学数学系, 福建 厦门 361005)

摘要: 定义并研究强 n-Gorenstein 环 R 及 R 上有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦模的性质, 得到: 商范畴$\underline{\mathrm{Mod}}$-R 中每个有限生成模都有有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦盖.

关键词: Gorenstein 平坦模; 上约化模; 平坦预解式
中图分类号: O 153　　文献标识码: A

1　定义与记号

环 R 为n-Gorenstein环, 如果 R 是左右 Noether 环, 并且左右自内射维数都小于等于 $n(n \geqslant 0)$(参见文献[1]). 为方便起见, 我们把左完全、n-Gorenstein 环称为强 n-Gorenstein 环.

设F是平坦左R-模, $\phi: F \to M$是左R-模同态, 若对任何平坦左 R-模F' 和模同态$f: F' \to M$, 存在模同态 $h: F' \to F$, 使得 $f = \phi h$, 那么则称同态 $\phi: F \to M$ 为左R-模M的平坦预盖. 进一步, 如果任何满足 $\phi h = \phi$ 的自同态$h: M \to M$ 都是自同构, 则 $\phi: F \to M$ 称为M 的平坦盖. 对偶地, 我们有平坦预包和平坦包的概念. 强 n-Gorenstein 环上每个左 R-模都有满的平坦盖和(不一定单的) 平坦预包. 令 $M \to F_0(M)$ 表示左 R-模M 的平坦预包; $F^0(M) \to M$ 表示M 的平坦盖. 对强 n-Gorenstein环 R 上每个左 R-模M, 我们有正合的单边平坦分解式: $\cdots \to F^n \to \cdots \to F^1 \to F^0 \to M \to 0$ 和不一定正合的单边平坦预解式: $0 \to M \to F_0 \to F_1 \to \cdots \to F_n \to \cdots$. 若记 $K_i = \ker(F^{i-1} \to F^{i-2})$ 为 M 的第 n 个合冲, $L^i = \mathrm{coker}(F_{i-1}(M) \to F_i(M))$ 为 M 的第n 个上合冲, 则 $F^i \to K_i (i = 1, 2, \cdots)$, $F^0 \to M$ 都是平坦盖, $M \to F^0$, $L^i \to F_{i+1} (i = 1, 2, \cdots)$ 都是平坦预包. 把它们联接起来, 就有完全平坦预解式: $\cdots \to F^n \to \cdots \to F^1 \to F^0 \to F_0 \to F_1 \to \cdots \to F_n \to \cdots$. 如果该复形正合, 就称之为$M$ 的完全平坦分解式; 如果模 M 的单边平坦预解式中每个平坦预盖都是平坦盖, 则称该预解式为M 的极小平坦预解式.

对左 R-模M、N, $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N)$(或$\underline{\mathrm{Hom}}(M, N)$)表示同态 $f: M \to N$ 的等价类集合, 这里f和g等价是指$f - g$能通过某个平坦模作分解. $\underline{\mathrm{Mod}} - R$ 是这样的范畴: 对象是所有的左 R-模, 同态是等价类(记为$[f]$). 如果模 M没有平坦的商模, 我们称模 M 是上约化的.

左 R-模M称为Gorenstein 平坦模, 如果存在平坦模的正合列: $\cdots \to F^1 \to F^0 \to F_0 \to F_1 \to \cdots$ 满足条件: $M = \ker(F_0 \to F_1)$, 且对任何内射右 R-模E, 函子 $E \otimes -$ 作用于它后仍然正合.

平坦包、平坦盖概念最先由文献[2] 引入, 之后许多数学工作者给予极大关注[3]. Gorenstein 平坦模是比平坦模更广泛的模类, 文献[4] 作者探讨了Gorenstein平坦包的存在性及其上核的性质. 本文中我们研究强Gorenstein环 R 上有限生成的上约化的Gorenstein 平坦模的性质及其平坦包、平坦盖、预解式的性质, 证明了商范畴$\underline{\mathrm{Mod}} - R$ 中每个有限生成模都有有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦盖.

2　主要结果

类似于文献[5] 的定理 1.2, 有

收稿日期: 2002-10-28
基金项目: 国家自然科学基金(10071062)资助
作者简介: 陈正新(1976—), 男, 博士研究生.

引理 1　如果 M 有平坦包, $\phi: M \to F$ 是它的一个平坦预包, 则下列命题等价:

(1) ϕ 是 M 的平坦包.

(2) F 和 $\mathrm{coker}\,\phi$ 没有公共的直和项.

引理 2[6]　设 R 是 n-Gorenstein 环, 则左 R-模 M 的平坦维数小于等于 n 等价于它的内射维数小于等于 n.

文献[7] 给出了 n-Gorenstein 环上 Gorenstein 平坦模的许多特征. 首先给出强 n-Gorenstein 上环 R 有限生成的 Gorenstein 平坦模的有趣刻划.

引理 3　强 n-Gorenstein 环 R 上有限生成的左 R-模 N 是 Gorenstein 平坦模当且仅当它的完全平坦预解式 $\cdots \to F^1(N) \to F^0(N) \to F_0(N) \to F_1(N) \to \cdots$ 正合且对任何平坦左 R-模 F, 用 $\mathrm{Hom}(-, F)$ 作用于该正合列仍正合.

证明　$\Rightarrow$ 设 N 是有限生成的 Gorenstein 平坦模, 则存在有限生成的平坦左 R-模的正合列 $F^1(N) \to F^0(N) \to F_0(N) \to F_1(N) \to \cdots$, 满足: $M = \ker(F_0(N) \to F_1(N))$ 且对任何内射右 R-模 E, 用 $E \otimes -$ 作用于它仍正合. 因为对任何平坦左 R-模 F, $\mathrm{Hom}_Z(F, Q/Z)$ 是内射右 R-模. 根据文献[7], 定理 2.1, 对 $\forall n \geqslant 1$, $\mathrm{Tor}_n(\mathrm{Hom}(F, Q/Z), N) = 0$. 所以对 $\forall n \geqslant 1$, $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^n(N, F), Q/Z) = 0$, 从而对 $\forall n \geqslant 1$, $\mathrm{Ext}^n(N, F) = 0$. 由此易知, 对任何平坦左 R-模 F, 正合列被 $\mathrm{Hom}(-, F)$ 作用于后保持正合.

$\Leftarrow$ 若 E 是内射右 R-模, 则 $E^+ = \mathrm{Hom}(E, Q/Z)$ 是平坦左 R-模. 由假设得 $\cdots \leftarrow \mathrm{Hom}(F^1(N), E^+) \leftarrow \mathrm{Hom}(F^0(N), E^+) \leftarrow \mathrm{Hom}(F_0(N), E^+) \leftarrow \mathrm{Hom}(F_1(N), E^+) \leftarrow \cdots$ 正合. 再由相伴性定理, $\mathrm{Hom}_R(F^i(N), E^+) \simeq \mathrm{Hom}_Z(E \otimes F^i(N), Q/Z)$, $\mathrm{Hom}_R(F_i(N), E^+) \simeq \mathrm{Hom}_R(E \otimes F_i(N), Q/Z)$, 我们得到正合列 $\cdots \to E \otimes F^1(N) \to E \otimes F^0(N) \to E \otimes F_0(N) \to E \otimes F_1(N) \to \cdots$, 故 N 是 Gorenstein 平坦模.

下面几个结论给出了有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦左 R-模的平坦盖及其核、平坦包及其上核的良好性质, 并由此刻划了它的自同态环.

引理 4　设 R 是强 n-Goenstein 环, N 是有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦左 R-模, $F \xrightarrow{\phi} N \to 0$ 是 N 的平坦盖, 则 $K = \ker\phi$ 也是有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦模, $\phi: K \to F$ 是平坦包, 且对任何 $f: N \to N$, 存在交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & K & \to & F & \to & N & \to & 0 \\
 & & \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow f & & \\
0 & \to & K & \to & F & \to & N & \to & 0
\end{array}$$

从而定义了 $\underline{\mathrm{End}}N$ 到 $\underline{\mathrm{End}}K$ 的同构.

证明　对任何内射右 R-模 E 和每个 $i \geqslant 1$, $\mathrm{Tor}^i(E, K) \simeq \mathrm{Tor}^{i+1}(E, N)$, 则对任何内射右 R-模 E 和每个 $n \geqslant 1$, $\mathrm{Tor}^{n+1}(E, N) = 0$, 即说明 K 是 Gorenstein 平坦模. 设 F' 是平坦左 R-模, 则 $\mathrm{Hom}(F, F') \to \mathrm{Hom}(K, F') \to \mathrm{Ext}^1(N, F')$ 正合. 因为 N 是有限生成的, 则由文献[8], 定理 9.51, 对任何 $n \geqslant 1$, $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^n(N, F'), Q/Z) \simeq \mathrm{Tor}^n(\mathrm{Hom}(F', Q/Z), N)$, 故 $\mathrm{Ext}^1(N, F') = 0$. 由文献[3], 引理 3.3, $K \to F$ 是平坦预盖. 既然 $\mathrm{coker}(K \to F)$ 没有非零平坦直和项, 它事实上是平坦包. 定义 $\psi: \underline{\mathrm{End}}N \to \underline{\mathrm{End}}K$, $\psi([f]) = [g]$, 易证 ψ 是同构.

推论 5　设 R 是强 n-Goenstein 环, N 是有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦模. 令 $I = \{f \in \mathrm{End}N \mid [f] = 0\}$, 则 I 是 $\mathrm{End}N$ 的理想, 且 I 包含在 $\mathrm{End}N$ 的 Jacobson 根中.

证明　只需验证对每个 $f \in \mathrm{End}N$, $1 + f$ 是 N 的自同构. 设 $F^0(N) \xrightarrow{g} N \to 0$ 是平坦盖, $N \xrightarrow{h} F^0(N) \xrightarrow{g} N$ 是 f 的分解. 令 $\bar{g}: F^0(N) \xrightarrow{g} N \xrightarrow{h} F^0(N)$, 则下图可换:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & K & \xrightarrow{\eta} & F^0(N) & \xrightarrow{g} & N & \to & 0 \\
 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1+\bar{g} & & \downarrow 1+f & & \\
0 & \to & K & \xrightarrow{\eta} & F^0(N) & \xrightarrow{g} & N & \to & 0
\end{array}$$

既然 $K \to F^0(N)$ 是平坦包, 则 $1 + \bar{g}$ 是 $F^0(N)$ 的自同构, 因此 $1 + f$ 是自同构.

推论 6　设 M、N 都是有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦左 R-模, 则模同态 $f: M \to N$ 是同构当且仅当 $[f]$ 是同构.

证明　如果 f 是同构, 那么 $[f^{-1}] = [f]^{-1}$. 反之, 若 $[f]$ 是同构, 令 $[f]^{-1} = [g]$, 则 $[gf] = [id_M]$. 由于 gf 在 $\underline{\mathrm{End}}M$ 的像是单位, 由推论 5, gf 也是 $\mathrm{End}M$ 中的单位. 类似可证, fg 是 $\mathrm{End}N$ 中单位, 所以 f 是同构.

定理 7　设 R 是强 n-Goenstein 环, L 是有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦左 R-模, $L \to F$ 是它的平坦包, 则 $L \to F$ 是单射, $C = F/L$ 也是有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦模且 $\pi: F \to F/L \to 0$

是平坦盖.

证明 根据 Gorenstein 平坦模定义, $L \to F$ 是单射. 由于环 R 是 Noether 环, C 是有限生成的. 下证映射 $\pi: F \to F/L \to 0$ 是多余的. 设 $F' \subset F$ 且 $L + F' = F$, 得 $L/F' \cap L \simeq F/F'$ 平坦. 而由 L 上约化推出 $F = F'$, 得证.

接着我们给出有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦左 R- 模的完全平坦预解式的性质.

定理 8 设环 R 是强 n-Gorenstein 环, 对 $\forall i \geqslant 0$, $0 \to L_{i+1} \to F^i(M) \to \cdots \to F^0(M) \to M \to 0$ 是正合的. 则对所有的 $i \geqslant n$, $L_{i+1} \to F^i(M)$ 是平坦预包. 进一步, 若 $i > n$, L_i 是上约化的, 从而 $L_{i+1} \to F^i(M)$ 是平坦包.

证明 对 $\forall i > n$, $\mathrm{Ext}^1(L_i, F) = \mathrm{Ext}^i(M, F) = 0$, 从而对 $\forall i \geqslant n$, $L_{i+1} \to F^i(M)$ 都是平坦预包.

若对 L_{n+1} 的某个子模 K, $F \simeq L_{n+1}/K$ 是非零平坦模, 则可得交换图:

$$\begin{tikzcd} F^n(M) \arrow[dr] & \\ L_{n+1} \arrow[u] \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

由此易得 $F^n(M) \to F$ 是满射, 则 F 是 $F^n(M)$ 的直和项, 这与分解式的极小性相矛盾. 故 L_{n+1} 上约化.

根据 L_{n+1} 是上约化的, 易证 $L_{n+2} \to F^{n+1}$ 是平坦包. 同理可证, 当 $i \geqslant n+1$ 时, L_i 是上约化的, 从而 $L_{i+1} \to F^i(M)$ 是平坦包.

引理 9 设 R 是强 n-Gorenstein 环, $0 \to M \to F_0 \to F_1 \to F_2 \to \cdots$ 是左 R- 模 M 的极小平坦预解式. 令 $L_i = \ker(F_{i+1} \to F_{i+2}) = \mathrm{coker}(F_{i-1} \to F_i)$, 则对 $\forall i \geqslant n-1$, L_i 是上约化的, $F_i \to L_i$ 是平坦盖, 且 $F_{n-2} \to L_{n-2}$ 是满射.

证明 设 $0 \to R \to E^0(R) \to \cdots \to E^n(R) \to 0$ 是 ${}_RR$ 的内射分解式, 则对每个 $i \geqslant n-1$, $\mathrm{Ext}^i(M, R) = 0$. 既然 $0 \to M \to F_0 \to F_1 \to F_2 \to \cdots$ 是 M 的极小平坦预解式, 那么 $F_{n-2} \to F_{n-1} \to F_n \to \cdots$ 正合. 故对 $i \geqslant n-2$, $F_i \to L_i$ 是满射. 而对 $i \geqslant n-1$, 由于 $L_i = \mathrm{coker}(F_{i-1} \to F_i)$ 的平坦预包的上核没有非零的平坦直和项, 所以 L_i 是上约化的.

假定 $F \xrightarrow{f} L_i$ 是 L_i 的平坦盖, 则有交换图:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & L_i \\ g & d_i \nearrow & \\ F_i & & \end{array}$$

因为 $d_i = fg$ 是满射, 而 f 为多余满同态, 所以 g 也为满射. 故存在 F', 使 $F_i = F \oplus F'$. 由 L_i 是上约化的, 得 $F' = 0$. 所以 $F \simeq F_i$, 即对每个 $i \geqslant n-1$, $F_i \to L_i$ 平坦盖.

定理 10 设环 R 是强 n-Gorenstein 环, M 是有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦左 R- 模, $\cdots \to F^1(M) \to F^0(M) \to M \to 0$ 是 M 的极小平坦预解式. 令 $L^i = \ker(F^{i-1}(M) \to F^{i-2}(M))$, $\forall i \geqslant 0$, 则对每个 $i \geqslant n$, L^i 是有限生成的 Gorenstein 平坦模; 且当 $i > n$ 时它还是上约化的.

证明 首先考虑 L^{n+1}. 由定理 8, L^{n+1} 是上约化的. 对任何 $j \geqslant n+1$, $0 \to L^{j+1} \to F^j(M) \to \cdots \to F^{n+1}(M) \to L^{n+1} \to 0$ 不仅是 L^{n+1} 的部分极小平坦分解式, 也是 L^{j+1} 的部分极小平坦预解式. 把它与 L^{n+1} 的极小平坦预解式粘接起来, 得 $0 \to L^{j+1} \to \cdots \to F^{n+1}(M) \to F_0(L^{n+1}) \to F_1(L^{n+1}) \to F_2(L^{n+1}) \to \cdots$. 取 j 充分大时它是正合列, 同时对任何平坦左 R-模 F, $\mathrm{Hom}(-, F)$ 作用于它后仍正合, 这就说明了原正合列是 L^{n+1} 的完全极小平坦分解式. 因此由引理 3, L^{n+1} 是 Gorenstein 平坦模.

$i = n$ 时, $0 \to L^{n+1} \to F^n(M) \to L^n \to 0$ 正合且 L^{n+1} 是 Gorenstein 平坦模. 既然对任何 $i \geqslant 1$ 和每个内射右 R-模 E, $\mathrm{Tor}_i(E, L^{n+1}) = 0$, 则对任何 $i \geqslant 1$ 和每个内射右 R- 模 E, $\mathrm{Tor}_i(E, L^n) = 0$. 由文献 [7], 引理 1.9, L^n 是 Gorenstein 平坦模. 又由定理 10, 当 $i > n$, L^i 是上约化的.

类似于平坦盖的定义, 给出有限生成的上约化的 Gorestein 平坦盖的定义. 设 F 是有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦左 R- 模, $\phi: F \to M$ 是左 R- 模同态, 若对任何有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦左 R- 模 F' 和模同态 $f: F' \to M$, 存在模同态 $h: F' \to F$, 使得 $f = \phi h$, 并且任何满足 $\phi h = \phi$ 的自同态 $h: M \to M$ 都是模自同构, 则 $\phi: F \to M$ 称为 M 的有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦盖.

定理 11 强 n-Gorenstein 环 R 的商范畴 $\underline{\mathrm{Mod}}-R$ 上每个有限生成模都有有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦盖. 且如果 $[f]: K \to M$ 和 $[g]: L \to M$ 是符合条件的两个盖, 则满足 $[h][f] = [g]$ 的同态 $h: K \to L$ 一定是范畴 $\underline{\mathrm{Mod}}-R$ 中的同构.

证明 设 M 是有限生成的左 R-模, $0 \to C \to F^n(M) \to \cdots \to F^1(M) \to F^0(M) \to M \to 0$ 是它的单边极小平坦分解式. 那么由定理 10, C 是有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦模. 设 $L = \mathrm{coker}(F_{n-1}(C) \to F_n(C))$, 则 $0 \to C \to F_0(C) \to F_1(C) \to \cdots \to F_n(C) \to L \to 0$ 是 C 的正合的单边极小平坦预解式. 下图

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 \to & C & \to & F^n(M) & \to \cdots \to & F^1(M) & \to & F^0(M) & \to & M & \to 0 \\ & 1\| & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \to & C & \to & F_0(C) & \to \cdots \to & F_{n-1}(C) & \to & F_n(C) & \to & L & \to 0 \end{array}$$

能被完成为交换图. 由定理 10, L 是有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦模. 下面证明$[f]: L \to M$ 是符合条件的盖.

假设 L' 是有限生成的上约化的 Gorenstein 平坦模, $L' \to M$ 是模同态. 则可构造下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 \to & C & \to & F^n(M) & \to \cdots \to & F^1(M) & \to & F^0(M) & \to & M & \to 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \to & D & \to & F^n(L') & \to \cdots \to & F^1(L') & \to & F^0(L') & \to & L' & \to 0 \end{array}$$

另一方面, 根据映射 $D \to C$, 我们又可得交换图:

$$0 \to C \to F_0(C) \to \quad F_1(C) \quad \to \cdots \to F_n(C) \to L \to 0$$

$$0 \to D \to F^n(L') \to F^{n-1}(L') \to \cdots \to F^0(L') \to L' \to 0$$

将第一个和第三个交换图粘在一起, 得合成映射 $L' \to L \to M$. 既然这个合成图和第二个交换图有相同的映射 $D \to C$, 由范畴论同伦知识知原同态 $L' \to M$ 和合成映射 $L' \to L \to M$ 在$\underline{\mathrm{Hom}}(L', M)$ 中是同一映射. 因此 $L \to M$ 是预盖.

设$[f]: L \to M$ 是上述预盖, $[g]: L \to L$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 \to & C & \to & F^n(M) & \to \cdots \to & F^0(M) & \to & M & \to 0 \\ & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow f & \\ 0 \to & C & \to & F_0(C) & \to \cdots \to & F_n(C) & \to & L & \to 0 \\ & \uparrow h & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow g & \\ 0 \to & C & \to & F_0(C) & \to \cdots \to & F_n(C) & \to & L & \to 0 \end{array}$$

满足$[f][g] = [f]$, 下面证明$[g]$ 是同构. 由推论 5, 只需证明 g 是同构. 我们完成交换图.

那么由同伦$[f][g] = [f]$ 推出$[h] = [id_C]$. 根据推论 6, h 是同构. 因此 $g: L \to L$ 是同构. 又如果 $K \to M$ 和 $L \to M$ 是两个这样的盖, 能得到$\underline{\mathrm{Mod}} - R$ 中两个交换图:

$$\begin{array}{ccc} K & \to & M \\ & \searrow & \uparrow \\ & & L \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} L & \to & M \\ & \searrow & \uparrow \\ & & K \end{array}$$

那么由上面的推导知 $K \to L \to K$ 和 $L \to K \to L$ 都是$\underline{\mathrm{Mod}} - R$ 中的同构. 故 L 和 K 在$\underline{\mathrm{Mod}} - R$ 中同构.

参考文献:

[1] Jenda O. On Gorenstein rings[J]. Math. Z., 1988, 197: 119—122.

[2] Eonchs E E. Injective and flat covers, envelops and resolvents[J]. Israel J. Math., 1981, 39: 189—209.

[3] Belshoff R, Enochs E E, Xu J. The exists of flat covers [J]. Proc. of Amer. Math. Soc., 1994, (1): 985—991.

[4] Enochs E E, Jenda O. Gorenstein flat preenvelops and resolvents [J]. 南京大学数学半年刊, 1995, (1): 1—9.

[5] Enochs E E, Kim H S, Rim S. Disivible envelopes over Gorenstein rings of Krull dimension at most one[J]. Comm. in Alg., 2001, 29(8): 3 275—3 283.

[6] Iwanaya Y. On rings with finite self—injective dimension II[J]. Tuskuba J. Math., 1980, 4(1): 107—113.

[7] Enochs E E, Jenda O, Torrecilles B. Gorenstein flat modules[J]. 南京大学数学半年刊, 1993, (1): 1—9.

[8] Rotman J J. An Introdution to Homological Algebra[M]. New York: Academic Press, 1979.

Finitely Generated Coreduced Gorenstein Flat Modules

CHEN Zheng-xin

(Department of Mathematics of Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: In this paper, we define and study finitely generated coreduced Gorenstein flat modules over strong n-Gorenstein rings, and claim that over quotient categories of these rings every finitely generated module has a finitely generated coreduced Gorenstein flat cover.

Key words: Gorenstein flat module; coreduced module; flat resolvent