第 47 卷　第 4 期
2008 年 7 月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol. 47　No. 4
Jul. 2008

某些等幂和中的完全平方数

祝 辉 林
(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 用初等方法证明了等幂和 $S_k(n)$在 $k=0, 1, 3, 5$ 时取得无穷多个完全平方数, 在 $k=2$ 仅当 $n=1, 24$ 时取得平方数 1^2 和 70^2, 在 $k=4, 6, 7$ 时仅取得唯一的平方数(1, 1), 同时用初等方法证明了一些相关不定方程的结果.

关键词: 等幂和; 不定方程; 初等方法
中图分类号: O 156.7　　文献标识码: A　　文章编号: 0438-0479(2008)04-0464-07

等幂和 $S_k(n)=\sum_{i=1}^{n} i^k$ 是一个历史悠久的课题[1], 它是关于 n 的 $k+1$ 次多项式, 可表示为 $S_k(n)=a_{k+1}n^{k+1}+a_kn^k+\cdots+a_in^i+\cdots+a_2n^2+a_1n$, 这里 a_i 是有理常数, $1\leqslant i\leqslant k+1$.

本文用初等方法研究了某些等幂和中的完全平方数问题, 即求解不定方程

$$m^2=S_k(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k, 1\leqslant k\leqslant 7.$$

它在 $k=0, 1, 3, 5$ 时有无穷多个完全平方数, 在 $k=2$ 时仅取得两个平方数 $m^2=1^2, 70^2$, 在 $k=4, 6, 7$ 时仅取得一个平方数 $m^2=1$, 这与文献[2] 中结果一致. 同时本文用初等方法给出了相关不定方程的解.

1　关于等幂和公式和本文的主要结果

计算等幂和公式是一个困难问题. 从文献[1] 知道, 前 7 个等幂和公式为:

$$S_1(n)=\frac{n(n+1)}{2}, S_2(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_3(n)=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$S_4(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},$$

$$S_5(n)=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12},$$

$$S_6(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42},$$

$$S_7(n)=\frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}.$$

当 $k=0$ 时, 无穷多组正整数 $(n, m)=(m^2, m)$ 满足 $m^2=S_0(n)$. 当 $k=1$ 时, 有 $m^2=\frac{n(n+1)}{2}$, 得 $(2n+1)^2-2(2m)^2=1$. 记 $U_t+V_t\sqrt{6}=(3+2\sqrt{2})^t$, $t\in \mathbf{N}^+$, 则

$$\begin{cases}U_{t+2}=6U_{t+1}-U_t, U_0=1, U_1=5\\ V_{t+2}=6V_{t+1}-V_t, V_0=0, V_1=2\end{cases},$$

$n=\frac{1}{2}(U_t-1)$, $m=\frac{1}{2}V_t$ 为其无穷组正整数解. 当 $k=3$ 时, 无穷组正整数 $(n, m)=\left(n, \frac{n(n+1)}{2}\right)$ 满足 $m^2=S_2(n)$. 当 $k=2, 4, 5, 6, 7$ 时, 有:

定理 1　$$m^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\tag{1}$$

有两组正整数解 $(n, m)=(1, 1), (24, 70)$.

定理 2　$$m^2=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\tag{2}$$

只有唯一的正整数解 $(n, m)=(1, 1)$.

定理 3　$$m^2=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)\tag{3}$$

有无穷组正整数解 $n=\frac{1}{2}(3U_t+6V_t-1)$, $m=\frac{1}{8}(U_t+3V_t)(3U_t+6V_t-1)(3U_t+6V_t+1)$, 这里 $U_t+V_t\sqrt{6}=(5+2\sqrt{6})^t$, $t\in N^+$.

定理 4

$$m^2=\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)\tag{4}$$

有唯一的正整数解 $(n, m)=(1, 1)$.

定理 5

$$m^2=\frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)\tag{5}$$

有唯一的正整数解 $(n, m)=(1, 1)$.

收稿日期: 2007-11-22
基金项目: 厦门大学专项基金(0000X08103)资助
Email: hlzhu@xmu.edu.cn

2　几个引理

引理 1　不定方程 $4x^4 - 3y^2 = 1$ 仅有 $(x, y) = (1, 1)$ 一组正整数解.

证明　因为 $\gcd(2x^2 - 1, 2x^2 + 1) = 1$，所以 ① $\begin{cases} 2x^2 - 1 = u^2 \\ 2x^2 + 1 = 3v^2 \end{cases}$ 或 ② $\begin{cases} 2x^2 - 1 = 3u^2 \\ 2x^2 + 1 = v^2 \end{cases}$，这里 $\gcd(u, v) = 1$ 且 $y = uv$. 由 ① 得 $4x^2 - u^2 = 3v^2$，故 ③ $\begin{cases} 2x - u = A^2 \\ 2x + u = 3B^2 \end{cases}$ 或 ④ $\begin{cases} 2x - u = 3A^2 \\ 2x + u = B^2 \end{cases}$，这里 $\gcd(A, B) = 1$ 且 $v = AB$. 由 ③ 得 $\begin{cases} x = \dfrac{A^2 + 3B^2}{4} \\ u = \dfrac{3B^2 - A^2}{2} \end{cases}$，代入 ① 得 $A^4 - 1 = 2\left(\dfrac{3A^2 - 3B^2}{4}\right)^2$，即 $\dfrac{A^2 + 1}{2} \cdot \dfrac{A^2 - 1}{8} = 2\left(\dfrac{3A^2 - 3B^2}{16}\right)^2$，故 $\begin{cases} A^2 + 1 = 2m^2 \\ A^2 - 1 = 16n^2 \end{cases}$，从而 $A = \pm 1, B = \pm 1, x = y = 1$. 对 ④，同法得到 $x = y = 1$. 对 ② 中第一个方程 mod3，无解. 引理 1 证毕.

引理 2　不定方程 $9x^4 - 8y^2 = 1$ 仅有 $(x, y) = (1, 1)$ 一组正整数解.

证明　因为 $\dfrac{3x^2 - 1}{2} \cdot \dfrac{3x^2 + 1}{4} = y^2$，所以得 $\begin{cases} 3x^2 - 1 = 2u^2 \\ 3x^2 + 1 = 4v^2 \end{cases}$，这里 $y = uv$. 参考文献[3－4] 中解法. 本方程等价于方程 ① $(2v)^2 - 3x^2 = 1$ 受 ② $1 = 2v^2 - u^2$ 限制. ① 的解为 $V_n + X_n\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^n$，$V_n = 2v$，$n$ 是奇数. 设 $n \neq \pm 1$，$n = \pm 1 + 2^t(2h + 1)$，$t \geqslant 2$，则 $V_n \equiv (-1)^h V_{2^t \pm 1} \equiv (-1)^h \left(V_{2^t} V_{\pm 1} + 3X_{2^t} X_{\pm 1}\right) \equiv \pm 3X_{2^t} \pmod{V_{2^t}}$. 从 ② 得 $(2u)^2 = 2(2V)^2 - 4 \equiv 18X_{2^t}^2 - 4 \pmod{V_{2^t}}$. 又因为 ① 隐含 $3X_{2^t}^2 \equiv -1 \pmod{V_{2^t}}$，所以 $(2u)^2 \equiv -10 \pmod{V_{2^t}}$，这不可能. 因为对 $t \geqslant 2$，$V_{2^t} \equiv 1 \pmod 8$ 和 $V_{2^t} \equiv 2 \pmod 5$，而 $\left(\dfrac{-10}{V_{2^t}}\right) = \left(\dfrac{10}{V_{2^t}}\right) = \left(\dfrac{2}{V_{2^t}}\right)\left(\dfrac{5}{V_{2^t}}\right) = \left(\dfrac{V_{2^t}}{5}\right) = \left(\dfrac{2}{5}\right) = 1$，矛盾. 所以 $n = \pm 1$，即 $x^2 = y^2 = 1$. 引理 2 证毕.

引理 3　不定方程 $x^4 - 1 = 6y^2$ 仅有 $(x, y) = (1, 0), (7, 20)$ 两组非负整数解.

证明　因为 $\dfrac{x^2 - 1}{8} \cdot \dfrac{x^2 + 1}{2} = 6\left(\dfrac{y}{4}\right)^2$，所以得 ① $\begin{cases} x^2 - 1 = 48u^2 \\ x^2 + 1 = 2v^2 \end{cases}$ 或 ② $\begin{cases} x^2 - 1 = 16u^2 \\ x^2 + 1 = 6v^2 \end{cases}$，这里 $\gcd(u, v) = 1$ 且 $y = 4uv$. 对 ②mod3，无解. 由 ① 得 ③ $\begin{cases} x^2 - 48u^2 = 1 \\ v^2 - 24u^2 = 1 \end{cases}$，即 $x^2 - v^2 = 24u^2$，故有 4 种情形：$\begin{cases} x - v = 2A^2 \\ x + v = 12B^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - v = 4A^2 \\ x + v = 6B^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - v = 6A^2 \\ x + v = 4B^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - v = 12A^2 \\ x + v = 2B^2 \end{cases}$，这里 $\gcd(A, B) = 1$ 且 $u = AB$. 故整理得到

$$\begin{cases} x = A^2 + 6B^2 \\ v = 6B^2 - A^2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 2A^2 + 3B^2 \\ v = 3B^2 - 2A^2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 3A^2 + 2B^2 \\ v = 2B^2 - 3A^2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 6A^2 + B^2 \\ v = B^2 - 6A^2 \end{cases}.$$

将以上 4 式分别代入 ① 中第 2 个方程得 $A^4 - 36A^2B^2 + 36B^4 = 1$，$4A^4 - 36A^2B^2 + 9B^4 = 1$，$9A^4 - 36A^2B^2 + 4B^4 = 1$，$36A^4 - 36A^2B^2 + B^4 = 1$. 根据对称性只须解前两个方程即可.

对 $A^4 - 36A^2B^2 + 36B^4 = 1$ 变形得 ④ $(6B^2 - 3A^2 - 1)(6B^2 - 3A^2 + 1) = 8A^4$.

因为 $\gcd(6B^2 - 3A^2 - 1, 6B^2 - 3A^2 + 1) = 2$，分解式 ④ 后再取 mod3 得 ⑤ $\begin{cases} 6B^2 - 3A^2 - 1 = 2a^4 \\ 6B^2 - 3A^2 + 1 = 4b^4 \end{cases}$ 或 ⑥ $\begin{cases} 6B^2 - 3A^2 - 1 = -4a^4 \\ 6B^2 - 3A^2 + 1 = -2b^4 \end{cases}$，这里 $\gcd(a, b) = 1$ 且 $A = ab$.

整理 ⑤⑥ 分别得 $(b^2)^4 - a^4 = (b^4 - 1)^2$ 和 $(a^2)^4 - b^4 = (a^4 - 1)^2$. 利用无穷递降法，得 $a^2 = b^2 = 1$，从而 ⑤ 和 ⑥ 的解为 $A^2 = B^2 = 1$ 和 $A^2 = 1, B^2 = 0$，即 $x = 1, 7$，$y = 1, 20$.

对 $4A^4 - 36A^2B^2 + 9B^4 = 1 \bmod 16$，得 $4A^2(A^2 - 9B^2) + 9B^4 \equiv 9 \pmod{16}$，矛盾. 引理 3 证毕.

引理 4　不定方程 $x^4 - 3y^2 = 1$ 仅有 $(x, y) = (1, 0)$ 一组非负整数解.

证明　因为 $\dfrac{x^2 - 1}{8} \cdot \dfrac{x^2 + 1}{2} = 3\left(\dfrac{y}{4}\right)^2$，所以得 ① $\begin{cases} x^2 - 1 = 24A^2 \\ x^2 + 1 = 2B^2 \end{cases}$ 或 ② $\begin{cases} x^2 - 1 = 8A^2 \\ x^2 + 1 = 6B^2 \end{cases}$，这里 $\gcd(A, B) = 1$ 且 $y = 4AB$. 对 ②mod3，无解. 由 ① 得 $x^2 - B^2 = 12A^2$，即 $\dfrac{x - B}{2} \cdot \dfrac{x + B}{2} = 3A^2$，从而 $\begin{cases} x - B = 2C^2 \\ x + B = 6D^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - B = 6C^2 \\ x + B = 2D^2 \end{cases}$，这里 $\gcd(C, D) = 1$ 且 $A = CD$. 分别整理得 ③ $\begin{cases} x = C^2 + 3D^2 \\ B = 3D^2 - C^2 \end{cases}$ 或 ④ $\begin{cases} x = 3C^2 + D^2 \\ B = D^2 - 3C^2 \end{cases}$. 将 ③ 代入 ① 中第 2 个方程得

$$\left(C^2 + 3D^2\right)^2 + 1 = 2\left(3D^2 - C^2\right)^2,$$

即 $\dfrac{3C^2 - 3D^2 - 1}{2} \cdot \dfrac{3C^2 + 3D^2 - 1}{2} = 2C^4$，从而得

$\begin{cases}3C^2-3D^2-1=2E^4\\3C^2-3D^2+1=4F^4\end{cases}$或$\begin{cases}3C^2-3D^2-1=4E^4\\3C^2-3D^2+1=2F^4\end{cases}$，这里 $\gcd(E,F)=1$ 且 $C=EF$. 分别整理得 $\left(\dfrac{E^4-1}{2}\right)^2=\left(F^2\right)^4-E^4$ 或 $\left(\dfrac{F^4+1}{2}\right)^2=\left(E^2\right)^4+F^4$. 利用无穷递降法得 $F^2=E^2=1$ 或 $E^2=0, F^2=1$. $(x,y)=(1,0)$. 对 ④ 同样处理得到相同的结果. 引理 4 证毕.

引理 5　不定方程组 $\begin{cases}u^4-1=168v^2\\3(u^4-3)^2+4=16w^2\end{cases}$ 仅有非负整数解: $(u,v,w)=(1,0,1)$.

证明　整理原方程组得 $4w^2-1=(2w-1)(2w+1)=3(84v^2-1)^2$, 所以得 ① $\begin{cases}2w-1=A^2\\2w+1=3B^2\end{cases}$ 或 ② $\begin{cases}2w-1=3A^2\\2w+1=B^2\end{cases}$, 这里 $84v^2-1=AB$. 对 ② mod3, 无解. ① 变形为 $3B^2-A^2=2=2(84v^2-AB)=168v^2-2AB$, 故 $(3B-A)(A+B)=168v^2$, 这里 A,B 均为奇数, $3B-A=4B-(A+B)$. 若 $2\,||\,(A+B)$, 则 $2\,||\,(3B-A)$, 无解. 若 $4\,||\,(A+B)$, 则 $8\,|\,(3B-A)$; 若 $4\,||\,(3B-A)$, 则 $8\,|\,(A+B)$, 故得到下面 8 种情形:

$\begin{cases}A+B=4s^2\\3B-A=168t^2\end{cases}$, $\begin{cases}A+B=8s^2\\3B-A=84t^2\end{cases}$, $\begin{cases}A+B=12s^2\\3B-A=56t^2\end{cases}$, $\begin{cases}A+B=24s^2\\3B-A=28t^2\end{cases}$, $\begin{cases}A+B=28s^2\\3B-A=24t^2\end{cases}$, $\begin{cases}A+B=56s^2\\3B-A=12t^2\end{cases}$, $\begin{cases}A+B=84s^2\\3B-A=8t^2\end{cases}$, $\begin{cases}A+B=168s^2\\3B-A=4t^2\end{cases}$, 这里 $v=2st$, $\gcd(s,t)=1$. 所以整理它们得

③ $\begin{cases}A=3s^2-42t^2\\B=s^2+42t^2\end{cases}$, ④ $\begin{cases}A=6s^2-21t^2\\B=2s^2+21t^2\end{cases}$,

⑤ $\begin{cases}A=9s^2-14t^2\\B=3s^2+14t^2\end{cases}$, ⑥ $\begin{cases}A=18s^2-7t^2\\B=6s^2+7t^2\end{cases}$,

⑦ $\begin{cases}A=21s^2-6t^2\\B=7s^2+6t^2\end{cases}$, ⑧ $\begin{cases}A=42s^2-3t^2\\B=14s^2+3t^2\end{cases}$,

⑨ $\begin{cases}A=63s^2-2t^2\\B=21s^2+2t^2\end{cases}$, ⑩ $\begin{cases}A=126s^2-t^2\\B=42s^2+t^2\end{cases}$.

将 ③ ~ ⑧ 分别代入 $3B^2-A^2=2$ 中, 由 ③ 得 $3B^2-(3s^2-42t^2)^2=2$; 由 ④ 得 $3B^2-(6s^2-21t^2)^2=2$; 由 ⑦ 得 $3B^2-(21s^2-6t^2)^2=2$; 由 ⑧ 得 $3B^2-(42s^2-3t^2)^2=2$; mod3 无解. 由 ⑤ 得 $784t^4-3(3s^2-14t^2)^2=1$, 故 $\begin{cases}28t^2-1=3m^2\\28t^2+1=n^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}28t^2-1=m^2\\28t^2+1=3n^2\end{cases}$, mod3 或整理后 mod3 无解. 由 ⑥ 得 $196t^4-3(6s^2-7t^2)^2=1$, 所以有 $\begin{cases}14t^2-1=m^2\\14t^2+1=3n^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}14t^2-1=3m^2\\14t^2+1=n^2\end{cases}$, mod8 无解. 由 ⑨ 得 $(2t^2+63s^2)^2-1=5292s^4$, 得

$\begin{cases}2t^2+63s^2-1=2m^4\\2t^2+63s^2+1=2646n^4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2t^2+63s^2-1=54m^4\\2t^2+63s^2+1=98n^4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2t^2+63s^2-1=98m^4\\2t^2+63s^2+1=54n^4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2t^2+63s^2-1=2646m^4\\2t^2+63s^2+1=2n^4\end{cases}$,

整理后取 mod3 得无解. 由 ⑩ 得 $(t^2+126s^2)^2-1=21168s^4$, 所以得 ⑪ $\begin{cases}t^2+126s^2-1=am^4\\t^2+126s^2+1=bn^4\end{cases}$, 这里 $s=mn$, $\gcd(m,n)=1$. (a,b) 有 8 种情形: (2, 10584), (8, 2646), (54, 392), (98, 216), (216, 98), (392, 54), (2646, 8), (10584, 2). 对前 6 种情形, 方程组 ⑪ 取 mod3 或 mod7, 无解. 对第 7 种情形, 整理 ⑪ 得 $4n^4-3(21m^2)^2=1$, 由引理 1 得无解. 对第 8 种情形, 整理 ⑪ 得 $n^4-3(14m^2)^2=1$, 由引理 4 得 $(m,n)=(0,\pm1)$, $(u,v,w)=(1,0,1)$. 引理 5 证毕.

3　定理 1 的证明

由式(1) 得 $24m^2=(2n+1)[(2n+1)^2-1]$, 即 $\begin{cases}2n+1=u^2\\(2n+1)^2-1=24v^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2n+1=3u^2\\(2n+1)^2-1=8v^2\end{cases}$, 这里 $\gcd(u,v)=1$, $m=uv$. 第 1 个方程组得 $u^4-1=6(2v)^2$. 由引理 3 得 $(u,v)=(1,0),(7,10)$, $(n,m)=(24,70)$. 第 2 个方程组得 $9u^4-1=8v^2$, 由引理 2 有 $(u^2,v^2)=(1,1)$, $(n,m)=(1,1)$. 定理 1 证毕. 此为有名的平方金字塔问题.

4　定理 2 的证明

方程(2) 变为

$$15m^2=(2n+1)\cdot\frac{(2n+1)^2-1}{8}\cdot\frac{3(2n+1)^2-7}{4}\qquad(6)$$

考虑到 $\gcd\left(2n+1,\dfrac{(2n+1)^2-1}{8}\right)=1$, $\gcd\left(2n+1,\dfrac{3(2n+1)^2-7}{4}\right)=1$ 或 7, $\gcd\left(\dfrac{(2n+1)^2-1}{8},\dfrac{3(2n+1)^2-7}{4}\right)=1$, 分两种情况来讨论:

情况 1: 当 $d=\gcd\left(2n+1,\dfrac{3(2n+1)^2-7}{4}\right)=1$

时，根据因子分解法，有

$$①\begin{cases}2n+1=u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^2-7}{4}=15w^2\end{cases}$$

$$②\begin{cases}2n+1=u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=3v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^2-7}{4}=5w^2\end{cases}$$

$$③\begin{cases}2n+1=u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=5v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^2-7}{4}=3w^2\end{cases}$$

$$④\begin{cases}2n+1=u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=15v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^2-7}{4}=w^2\end{cases}$$

$$⑤\begin{cases}2n+1=3u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^2-7}{4}=5w^2\end{cases}$$

$$⑥\begin{cases}2n+1=3u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=5v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^2-7}{4}=w^2\end{cases}$$

$$⑦\begin{cases}2n+1=5u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^2-7}{4}=3w^2\end{cases}$$

$$⑧\begin{cases}2n+1=5u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=3v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^2-7}{4}=w^2\end{cases}$$

$$⑨\begin{cases}2n+1=15u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^2-7}{4}=w^2\end{cases}$$

对 ①③⑥⑦⑧ 取 mod3，对 ②④ 取 mod4，对 ⑨ 取 mod7，矛盾. 由 ⑤ 得 $\begin{cases}9u^4-8v^2=1\\ 27u^4-20w^2=7\end{cases}$，从引理 2 得 $(u,v)=(1,1)$，$w=1$，$(n,m)=(1,1)$.

情况 2：若 $d=7$，令 $m=7l$，式(6) 变为

$$15l^2=\frac{(2n+1)}{7}\cdot\frac{(2n+1)^2-1}{8}\cdot\frac{3(2n+1)^2-7}{28},$$

故有

$$①\begin{cases}\dfrac{2n+1}{7}=u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^2-7}{28}=15w^2\end{cases}$$

$$②\begin{cases}\dfrac{2n+1}{7}=u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=3v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^2-7}{28}=5w^2\end{cases}$$

$$③\begin{cases}\dfrac{2n+1}{7}=u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=5v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^2-7}{28}=3w^2\end{cases}$$

$$④\begin{cases}\dfrac{2n+1}{7}=u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=15v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^2-7}{28}=w^2\end{cases}$$

$$⑤\begin{cases}\dfrac{2n+1}{7}=3u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^2-7}{28}=5w^2\end{cases}$$

$$⑥\begin{cases}\dfrac{2n+1}{7}=3u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=5v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^2-7}{28}=w^2\end{cases}$$

$$⑦\begin{cases}\dfrac{2n+1}{7}=5u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^2-7}{28}=3w^2\end{cases}$$

$$⑧\begin{cases}\dfrac{2n+1}{7}=5u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=3v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^2-7}{28}=w^2\end{cases}$$

$$⑨\begin{cases}\dfrac{2n+1}{7}=15u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^2-7}{28}=w^2\end{cases}.$$

对 ①③④⑥⑦⑧⑨mod3, 对 ⑤mod7, 矛盾. 由 ② 得$\dfrac{7u^2-1}{2}\cdot\dfrac{7u^2+1}{16}=3\left(\dfrac{v}{2}\right)^2$, 即$\begin{cases}7u^2-1=2A^2\\7u^2+1=48B^2\end{cases}$或$\begin{cases}7u^2-1=6A^2\\7u^2+1=16B^2\end{cases}$, mod16, 无解. 定理 2 证毕.

5　定理 3 的证明

由式(3) 得$(2n+1)^2-6\left(\dfrac{2m}{n(n+1)}\right)^2=3$, 故$(2n+1)+\dfrac{2m}{n(n+1)}\sqrt{6}=(3+\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})^t, t\in N^+$.

记$U_t+V_t\sqrt{6}=(5+2\sqrt{6})^t$, 即

$$\begin{cases}U_{t+2}=10U_{t+1}-U_t, U_0=1, U_1=5\\ V_{t+2}=10V_{t+1}-V_t, V_0=0, V_1=2\end{cases},$$

所以得到

$$\begin{cases}2n+1=3U_t+6V_t\\ \dfrac{2m}{n(n+1)}=U_t+3V_t\end{cases},$$

从而 $n=\dfrac{1}{2}(3U_t+6V_t-1)$, $m=\dfrac{1}{8}(U_t+3V_t)(3U_t+6V_t-1)(3U_t+6V_t+1)$ 为式(3) 的无穷组正整数解. 定理 3 证毕.

6　定理 4 的证明

方程(4) 变形为

$$21m^2=(2n+1)\frac{(2n+1)^2-1}{8}\cdot\frac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16}\tag{7}$$

考虑到 $\gcd\left(2n+1,\dfrac{(2n+1)^2-1}{8}\right)=1$, $\gcd\left(2n+1,\dfrac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16}\right)=1$ 或 31, $\gcd\left(\dfrac{(2n+1)^2-1}{8},\dfrac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16}\right)=1$, 分两种情况来讨论:

情况 1: 当 $d=\gcd\left(2n+1,\dfrac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16}\right)=1$ 时, 式(7) 因式分解得

$$①\begin{cases}2n+1=u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16}=21w^2\end{cases}$$

$$②\begin{cases}2n+1=u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=3v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16}=7w^2\end{cases}$$

$$③\begin{cases}2n+1=u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=7v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16}=3w^2\end{cases}$$

$$④\begin{cases}2n+1=u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=21v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16}=w^2\end{cases}$$

$$⑤\begin{cases}2n+1=3u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16}=7w^2\end{cases}$$

$$⑥\begin{cases}2n+1=3u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=7v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16}=w^2\end{cases}$$

$$⑦\begin{cases}2n+1=7u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16}=3w^2\end{cases}$$

$$⑧\begin{cases}2n+1=7u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=3v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16}=w^2\end{cases}$$

$$⑨\begin{cases}2n+1=21u^2\\ \dfrac{(2n+1)^2-1}{8}=v^2\\ \dfrac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16}=w^2\end{cases}$$

对①③mod3, 矛盾. 由②得 $u^4-1=24v^2$, 由引理 3 得 $(u,v)=(1,0)$ 或 $(7,10)$, 即 $n=0$ 或 3, 代入②中第 3 个方程得无解. 由④得引理 5 中方程组, 故 $(n,m)=(0,0)$. 由⑤得 $9u^4-1=8v^2$, 利用引理 2 得 $(u,v)=(1,1)$, $(n,m)=(1,1)$. 由⑥得 $\frac{3u^2-1}{2}\cdot\frac{3u^2+1}{4}=7v^2$, 即 $\begin{cases}3u^2-1=2A^2\\3u^2+1=28B^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3u^2-1=14A^2\\3u^2+1=4B^2\end{cases}$, 前一个方程组两式相减后取 mod7, 后一个方程组 mod8, 矛盾. 由⑦和⑨得 $49u^4-1=8v^2$ 和 $(21u^2)^2-1=8v^2$, 取 mod7, 无解. 由⑧得 $49u^4-1=24v^2$, 取 mod16 知 v 为偶, 所以 $\frac{7u^2-1}{2}\cdot\frac{7u^2+1}{16}=3\left(\frac{v}{2}\right)^2$, 即

$$\begin{cases}7u^2-1=2A^2\\7u^2+1=48B^2\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}7u^2-1=6A^2\\7u^2+1=16B^2\end{cases}.$$

整理它们得 $24B^2-A^2=1$ 或 $8B^2-3A^2=1$, 分别取 mod3, mod8, 无解.

情况 2: $d=31$ 时, 令 $m=31l$, 式(7)变形为

$$21m^2=\frac{2n+1}{31}\cdot\frac{(2n+1)^2-1}{8}\cdot\frac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16\cdot 31},$$

故得

$$①\begin{cases}\frac{2n+1}{31}=u^2\\\frac{(2n+1)^2-1}{8}=v^2\\\frac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16\cdot 31}=21w^2\end{cases}$$

$$②\begin{cases}\frac{2n+1}{31}=u^2\\\frac{(2n+1)^2-1}{8}=3v^2\\\frac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16\cdot 31}=7w^2\end{cases}$$

$$③\begin{cases}\frac{2n+1}{31}=u^2\\\frac{(2n+1)^2-1}{8}=7v^2\\\frac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16\cdot 31}=3w^2\end{cases}$$

$$④\begin{cases}\frac{2n+1}{31}=u^2\\\frac{(2n+1)^2-1}{8}=21v^2\\\frac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16\cdot 31}=w^2\end{cases}$$

$$⑤\begin{cases}\frac{2n+1}{31}=3u^2\\\frac{(2n+1)^2-1}{8}=v^2\\\frac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16\cdot 31}=7w^2\end{cases}$$

$$⑥\begin{cases}\frac{2n+1}{31}=3u^2\\\frac{(2n+1)^2-1}{8}=7v^2\\\frac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16\cdot 31}=w^2\end{cases}$$

$$⑦\begin{cases}\frac{2n+1}{31}=7u^2\\\frac{(2n+1)^2-1}{8}=v^2\\\frac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16\cdot 31}=3w^2\end{cases}$$

$$⑧\begin{cases}\frac{2n+1}{31}=7u^2\\\frac{(2n+1)^2-1}{8}=3v^2\\\frac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16\cdot 31}=w^2\end{cases}$$

$$⑨\begin{cases}\frac{2n+1}{31}=21u^2\\\frac{(2n+1)^2-1}{8}=v^2\\\frac{3(2n+1)^4-18(2n+1)^2+31}{16\cdot 31}=w^2\end{cases}$$

由①③⑦分别得 $3[(31u^2)^2-3]^2+4=16\cdot 31\cdot 21w^2$, $3[(31u^2)^2-3]^2+4=16\cdot 31\cdot 3w^2$ 和 $3[(217u^2)^2-3]^2+4=16\cdot 31\cdot 3w^2$, 均取 mod3, 无解. 对②整理得 $(31u^2)^2-1=24v^2$, 故有 4 种情形:

$$\begin{cases}\frac{31u^2-1}{2}=A^2\\\frac{31u^2+1}{8}=6B^2\end{cases}\text{或}\begin{cases}\frac{31u^2-1}{2}=2A^2\\\frac{31u^2+1}{8}=3B^2\end{cases}\text{或}$$

$$\begin{cases}\frac{31u^2-1}{2}=3A^2\\\frac{31u^2+1}{8}=2B^2\end{cases}\text{或}\begin{cases}\frac{31u^2-1}{2}=6A^2\\\frac{31u^2+1}{8}=B^2\end{cases}.$$

对第 1、3 两种情形 mod3, 对 2、4 两种情形 mod4, 无解. 由④得 $(31u^2)^2-1=168v^2$, 故

$$\begin{cases}\frac{31u^2-1}{2}=A^2\\\frac{31u^2+1}{8}=42B^2\end{cases}\text{或}\begin{cases}\frac{31u^2-1}{2}=3A^2\\\frac{31u^2+1}{8}=14B^2\end{cases}\text{或}$$

$$\begin{cases}\dfrac{31u^2-1}{2}=7A^2\\ \dfrac{31u^2+1}{8}=6B^2\end{cases} \text{或} \begin{cases}\dfrac{31u^2-1}{2}=21A^2\\ \dfrac{31u^2+1}{8}=2B^2\end{cases} \text{或}$$

$$\begin{cases}\dfrac{31u^2-1}{2}=2A^2\\ \dfrac{31u^2+1}{8}=21B^2\end{cases} \text{或} \begin{cases}\dfrac{31u^2-1}{2}=6A^2\\ \dfrac{31u^2+1}{8}=7B^2\end{cases} \text{或}$$

$$\begin{cases}\dfrac{31u^2-1}{2}=14A^2\\ \dfrac{31u^2+1}{8}=3B^2\end{cases} \text{或} \begin{cases}\dfrac{31u^2-1}{2}=42A^2\\ \dfrac{31u^2+1}{8}=B^2\end{cases}.$$

前 4 种情形 mod3, 后 4 种情形 mod4, 无解. 由⑤得 $(93u^2)^2-1=8v^2$, 故 $\begin{cases}93u^2-1=4A^2\\ 93u^2+1=2B^2\end{cases}$, mod3, 无解. 由⑥得 $(93u^2)^2-1=56v^2$, 故 $\begin{cases}93u^2-1=28A^2\\ 93u^2+1=2B^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}93u^2-1=4A^2\\ 93u^2+1=14B^2\end{cases}$, 分别 mod3, 无解. 由⑧得 $(217u^2)^2-1=24v^2$, 即 $217u^2+2v\sqrt{6}=(5+2\sqrt{6})^t=U_t+V_t\sqrt{6}$. 因为 $217=7\cdot 31$, 对 U_t 分别取 mod7 和 mod31, 得其周期分别为 1, −2, 0, 2, −1, 2, 0, −2 和 1, 5, 18, −11, −4, 2, −7, −10, 0, 10, 7, −2, 4, 11, −18, −5, −1, −5, −18, 11, 4, −2, 7, 10, 0, −10, −7, 2, −4, −11, 18, 5, 得 $t\equiv 2, 6 \pmod 8$ 和 $t\equiv 8, 24 \pmod{32}$, 故 $U_t\not\equiv 0 \pmod{217}$, 无解. 对于⑨, 整理得 $(31\cdot 21u^2)^2-1=8v^2$, mod7, 无解. 定理 4 证毕.

7　定理 5 的证明

由式(5)得 $\left(\dfrac{6m}{n(n+1)}\right)^2-2\left[\dfrac{3n(n+1)}{2}-1\right]^2=1$. 设 $t\in\mathbb{N}^+$, 记 $U_t+V_t\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^t$, 则

$$\begin{cases}\dfrac{3n(n+1)}{2}-1=V_t\\ \dfrac{6m}{n(n+1)}=U_t\end{cases},$$

这里 $\begin{cases}U_{t+2}=6U_{t+1}-U_t, U_0=1, U_1=5\\ V_{t+2}=6V_{t+1}-V_t, V_0=0, V_1=2\end{cases}$, 对 U_t 和 V_t 均 mod3 得 $t\equiv 1 \pmod 4$. 设 $t\neq 1$, 记 $t=1+2^sl$, $s\geqslant 2$, l 奇, 因此 $(6n+3)^2=24_{1+2^sl}+33\equiv 24\cdot(-1)^lV_1+33\equiv -15 \pmod{U_{2^{s-1}}}$. 而 $\left(\dfrac{-15}{U_{2^{s-1}}}\right)=\left(\dfrac{-1}{U_{2^{s-1}}}\right)\cdot\left(\dfrac{3}{U_{2^{s-1}}}\right)\cdot\left(\dfrac{5}{U_{2^{s-1}}}\right)=\left(\dfrac{U_{2^{s-1}}}{5}\right)=1$, 考虑到 U_t mod5 的周期为: 1, −2, 2, −1, 2, −2, 所以有 $2^{s-1}\equiv 0 \pmod 6$, 矛盾. 所以只有当 $l=0$ 即 $t=1$ 时有解, 此时 $V_t=2, U_t=3$, $3(2n+1)^2=8V_1+11=27$, 最终得到 $n=1, m=1$. 定理 5 证毕.

参考文献:

[1]　陈景润, 黎鉴愚. 关于自然数前 n 项的和[J]. 厦门大学学报: 自然科学版, 1984, 23(2): 135−147.

[2]　Bennett M A, Gyory K, Pinter A. On the diophantine equation $1^k+2^k+\cdots+x^k=y^n$[J]. Compositio Math, 2004, 140: 1417−1431.

[3]　马德刚. 方程 $6y^2=x(x+1)(2x+1)$ 的解的初等证明[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 1985(4): 107−116.

[4]　Cucurezeanu I. An elementary solution of Lucas´problem[J]. J Number Theory, 1993, 44: 9−12.

On Perfect Squares of the Sums of Power of the First n Integers

ZHU Hui-lin

(School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: In this paper, by using elementary method we proved that, in the sums of power of the first n integers, denoted as $S_k(n)=1^k+\cdots+n^k$, there are infinite perfect squares when $k=0, 1, 3, 5$; while $k=2$, there are two perfect squares 1^2 and 70^2 corresponding to $n=1, 24$; in $k=4, 6, 7$, there are only one perfect square 1^2. Simultaneously, we prove some results of related indefinite equations by elementary method.

Key words: power sums; diophantine equation; elementary method