文章编号:0438-0479(2003)05-0564-03

有界域上具有离散核的Cauchy公式和$\bar\partial$-方程

黄玉笙,林良裕
(1.莆田学院数学系,福建 莆田 351100; 2. 厦门大学数学系,福建 厦门 361005)

摘要:设D是C^n空间中具有$C^{(1)}$边界∂D的有界域,本文利用D上一个局部有限的可数强拟凸开复盖,定义了D上一个新的局部全纯的σ点有限的单位分解,建立了D上一个更一般的具有离散局部全纯核的Cauchy积分公式并获得D上$\bar\partial$-方程的具有离散核的解的积分表示.

关键词:有界域;离散核;积分公式;$\bar\partial$-方程
中图分类号:O 174.56 文献标识码:A

周知,在C^n空间中一般有界域上是不可能存在$\bar\partial$-方程的整体解的积分表示.1996年,文献[1]首先引用拓扑方法定义了C^n中有界域D上的局部全纯的σ点有限的单位分解,建立了D上的一个具有离散核的Bochner-Martinelli公式,从而克服了在一般有界域上无法讨论$\bar\partial$-方程的困难,并在$\bar\partial$-方程和奇异积分方程等领域获得了应用[2,3].本文在文献[1]的基础上,利用D上的一个局部有限的可数的强拟凸开复盖,定义了D上一个新的局部全纯的σ点有限的单位分解,建立了D上一个比文献[1]更一般的具有离散核的Cauchy积分公式,并获得了$\bar\partial$-方程的具有离散核的解的积分表示.本文采用文献[1]中的记号.

1 定义和引理

定义1[1] 设$\mathscr{U}$是C^n中有界域D的一个局部有限的可数的开复盖,$\mathscr{F}=\{f_n: n\in\mathscr{N}\}$是$D$上的一个局部全纯的σ点有限的可积函数族[1],若对每一点$z\in D$,满足

$$\sum_{f_n\in\mathscr{F}} f_n(x)=1$$

并且对每一$f_n\in\mathscr{F}$,存在一个$U\in\mathscr{U}$,使得$\{z\in D \mid f_n(z)\neq 0\}=U$,则称$\mathscr{F}$是$D$上的一个从属于$\mathscr{U}$的局部全纯的σ点有限的单位分解.

定义2 设D是C^n中一具有$C^{(1)}$边界的有界域,$\mathscr{D}=\{D_v \mid D_v\subset D,\ v=1,2,\cdots\}$是$D$的一个局部有限的可数的具有$C^{(2)}$边界的强拟凸开复盖,使得由每一个$C^{(2)}$光滑边界的强拟凸开集$D_v$的定义函数$\rho_v$决定的局部支撑函数[1]

$$\Phi_v(\zeta,z)=\sum_{k=1}^{n}P_{vk}(\zeta,z)(\zeta_k-z_k),\ v=1,2,\cdots$$

满足对每一有限集$J=\{j_1,\cdots,j_l\}$,$j_1<j_2<\cdots<j_l$,$1\leqslant j_k<+\infty$和$\forall(\zeta,z)\in\partial D\times\bigcap_{v\in J}D_v$,$\bigcap_{v\in J}D_v\neq\phi$,有

$$\sum_{v\in J}\chi_{D_v}(z)\Phi_v(\zeta,z)\neq 0,$$

其中$\chi_{D_v}(z)$是D_v的特征函数,则称D上的从属于开复盖$\mathscr{D}$的局部支撑函数族$\Psi=\{\Phi_v(\zeta,z): v=1,2,\cdots\}$是相容的,并称$\mathscr{D}$是$D$上一个相容的局部有限的可数强拟凸开复盖.

显然,若取$\mathscr{D}$为有界域D上局部有限可数的严格凸开复盖,则它是相容的[4].又,若取定一个包含于D内的具有$C^{(2)}$光滑边界的强拟凸开集$D_0=\{J\in U \mid \rho_0(\zeta)<0\}$,$D_0\subset D\subset U$,$\rho_0$是定义在开集$U$上的$C^{(2)}$强多次调和实值函数.这时,可取从$D_0$到$D$内的正实等系数双全纯线性运动群构造域$D$的一个强拟凸开复盖,再作其局部有限的可数强拟凸加细开复盖,容易验证后者也是相容的,因为这对任意二个局部支撑函数Φ_j与Φ_k仅相差一个正的常数因子[5].

引理1[6] 设$D_1\subset D$是C^n中有界域D内任一具有$C^{(2)}$光滑边界的强拟凸域,U是D的邻域,

收稿日期:2002-09-08
基金项目:部分国家天元数学基金(TY10126033)资助
作者简介:黄玉笙(1955-),男,副教授.
E-mail:HYS3883636@163.com

$\rho_1(z)$ 为 U 上的 $C^{(2)}$ 强多次调和实值函数, 使得 $D_1=\{\zeta\in U\cap D:\rho_1(\zeta)<0\}$ 且 $\mathrm{grad}\rho_1(\zeta)|_U\neq 0$. 则存在函数 $F(\zeta,z): U\times C^n\to C$ (复数域), 关于 $\zeta\in U$ 是可微分的, 关于 z 是全纯的, 且存在正数 A 和 ε, 使得当 $(\zeta,z)\in U\times U$, $|\zeta-z|<\varepsilon$ 时

$$\mathrm{Re}F(\zeta,z)\geqslant\rho_1(\zeta)-\rho_1(z)+A|\zeta-z|^2 \tag{1}$$

引理 2　在引理 1 的条件下, 存在 $\partial D\times D_1$ 上的局部支撑函数

$$\Phi_1(\zeta,z)=\sum_{k=1}^{n}P_{1k}(\zeta,z)(\zeta_k-z_k) \tag{2}$$

使得 $\Phi_1(\zeta,z)\neq 0$, $\forall(\zeta,z)\in\partial D\times D_1$, $\Phi_1(\zeta,\zeta)=0$, $\zeta\in\partial D$. 其中 $P_{1k}(\zeta,z)$ 关于 $\zeta\in\partial D$ 是 $C^{(1)}$ 的, 关于 $z\in D_1$ 是全纯的.

证　设 U 是 D 的邻域, $D_1=\{\zeta\in D_1\cap U:\rho_1(\zeta)<0\}$ 是 D 中的一具有 $C^{(2)}$ 边界的强拟凸域, 取适当的 $\delta>0$, 对强拟凸域 $D_1{}^{\delta}=\{\zeta\in U:\rho_1(\zeta)<\delta\}$. 由文献[5] 和引理 1 知, 在 $U\times D_1{}^{\delta}$ 上, 对取值于 Fréchet 空间的全纯函数解 Cousin 问题 I 知, 我们能找到一个定义在 $U\times D_1{}^{\delta}$ 上的局部支撑函数 $\Phi_1(\zeta,z)$, 它关于 $\zeta\in U$ 是 $C^{(1)}$ 的, 关于 $z\in D_1{}^{\delta}$ 是全纯的, 并满足

$$\Phi_1(\zeta,\zeta)=0,\quad \Phi_1(\zeta,z)\neq 0,\ \text{当}\ |\zeta-z|\geqslant\varepsilon \tag{3}$$

$$\Phi_1(\zeta,z)=F(\zeta,z)H(\zeta,z),\ \text{当}\ |\zeta-z|<\varepsilon \tag{4}$$

其中 $H(\zeta,z)$ 关于 ζ 是 $C^{(1)}$ 的, 关于 z 是全纯的, 满足 $0<A_0\leqslant|H|\leqslant A_1<+\infty$, $F(\zeta,z)$ 如引理 1 中的函数, 由 Hefer 定理 (参见文献[7, 8]) 在 $U\times D_1{}^{\delta}$ 上, 有

$$\Phi_1(\zeta,z)=\sum_{k=1}^{n}P_{1k}(\zeta,z)(\zeta_k-z_k)$$

特别地, 对 $\forall(\zeta,z)\in\partial D\times D_1$, 由式(3) 和式(4), 有

$$\Phi_1(\zeta,z)\neq 0,\quad \forall(\zeta,z)\in\partial D\times D_1.$$

$$\Phi_1(\zeta,\zeta)=0,\quad \forall\zeta\in\partial D.$$

下面构造一个新的单位分解和离散核. 设 $\mathscr{D}=\{D_n: n=1,2,\cdots, D_n\subset D\}$ 是域 D 内的一个相容的局部有限的可数的具有 $C^{(2)}$ 边界的强拟凸开复盖. $\mathscr{F}=\{\Phi_n:\Phi_n$ 是定义在 $\partial D\times D_n$ 上的局部支撑函数, $n=1,2,\cdots\}$ 是一从属 $\mathscr{D}$ 的相容的局部全纯的局部支撑函数族. 由式(3) 和式(4) 及定义 2 知存在 $\partial D\times D$ 的邻域 U^*, 使得 $U^{**}=\{(\zeta,z)\in U^*:\zeta\neq z\}$ 上, 有

$$\Phi(\zeta,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{D_n}(z)\Phi_n(\zeta,z)\neq 0 \tag{5}$$

其中 χ_{D_n} 是 D_n 的特征函数. 注意到局部有限的开复盖必是点有限的. 因此, 上式对每一个固定的点 $z\in D$, 式(5) 中仅有有限项不为零. 记

$$P_k(\zeta,z)=\sum_{v=1}^{\infty}\chi_{D_v}(z)P_{vk}(\zeta,z)$$

其中 $\Phi_v(\zeta,z)=\sum_{k=1}^{n}P_{vk}(\zeta,z)(\zeta_k-z_k)$, 我们定义

$$G: U^{**}\to C^n$$

$$G_k(\zeta,z)=P_k(\zeta,z)/\Phi(\zeta,z),\quad 1\leqslant k\leqslant n \tag{6}$$

$G_k(\zeta,z)$ 关于 ζ 是 $C^{(1)}$ 的, 关于 z 是局部全纯的; 尤其满足:

a) 对固定的 $\zeta\in\partial D$, $G_k(\zeta,z)$ 关于 $z\in D$ 是局部全纯的.

b) 对 $(\zeta,z)\in U^{**}$, $\sum_{k=1}^{n}G_k(\zeta,z)(\zeta_k-z_k)=1$.

因此, $\{G_k\}_{k=1}^{n}$ 是 D 上关于 z 局部全纯的 σ 点有限的单位分解.

现在, 定义 $(\zeta,z)\in\partial D\times D$ 上的一个新的离散核

$$\Omega(G)=(n-1)!(2\pi i)^{-n}\cdot\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}G_k\mathrm{d}G_{[k]}\wedge\mathrm{d}\zeta \tag{7}$$

类似地利用著名的 Henkin 技巧, 能定义 $\partial D\times D$ 上局部可微分的同伦核

$$\Omega(H)=(n-1)!(2\pi i)^{-n}\cdot\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}H_k\mathrm{d}H_{[k]}\wedge\mathrm{d}\zeta \tag{8}$$

其中 $H_k(\zeta,z)=\lambda(\bar{\zeta}_k-\bar{z}_k)|\zeta-z|^{-2}+(1-\lambda)G_k(\zeta,z)$, $1\leqslant k\leqslant n$, $\lambda\in[0,1]$, 易知 $\langle\zeta-z,H\rangle=1$.

类似文献[6] 的证明, 有

引理 3　设 $f(\zeta)\in C^{(k)}(\bar{D})$, $1\leqslant k\leqslant+\infty$, 那么对任意固定的 $z\in D$ 和所有的 $\zeta\in\partial D$, $\lambda\in\mathscr{R}$ 有

$$\mathrm{d}_{\zeta,\lambda}(f\Omega(H))=\bar{\partial}_\zeta f\wedge\Omega(H). \tag{9}$$

2　积分公式与 $\bar{\partial}$-方程

定理 1　设 D 是 C^n 中具有 $C^{(1)}$ 边界的有界域, 函数 $f\in C^{(k)}(\bar{D})$, $1\leqslant k\leqslant+\infty$, 那么对 $\forall z\in D$,

$$f(z)=\int_{\partial D}f(\zeta)\Omega(G)-\int_{\partial D}\bar{\partial}f\wedge\int_0^1\Omega(H)-\int_D\bar{\partial}f\wedge\omega(\bar{\zeta}-\bar{z},\zeta-z) \tag{10}$$

其中 $\omega(\bar{\zeta}-\bar{z},\zeta-z)$ 是 Bochner-Martinelli 核[9].

证　设 $\theta = I \times \partial D \cup \{1\} \times (D \setminus B_\varepsilon(z))$ 其中 $(\lambda, \zeta) \in \theta$, $\lambda \in I = [0,1]$, 若 $z \in D_j$, $B_\varepsilon(z) \subset D_j \subset D$. $D_j \in \mathscr{D}$, 考虑 $d(f\Omega(H))$, 在集合 θ 上应用 Stokes 公式及引理 3, 令 $\varepsilon \to 0$ 立得式(10).

由定理 1, 立得下面的推论.

推论 1　在定理 1 的条件下, 若 $f \in A_c(D)$, 则

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\Omega(G), \quad z \in D \tag{11}$$

定理 2　设 D 是 C^n 中具有 $C^{(1)}$ 边界的有界域, $g_k \in C^\infty(\bar{D})$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $g(z) = \sum_{k=1}^{n} g_k(z)\mathrm{d}\bar{z}_k \in C^\infty_{0,1}(D)$ 满足 $\bar{\partial} g = 0$, 则方程 $\bar{\partial} u = g$ 在域 D 上有局部可微分的解

$$u(z) = -\int_D g(\zeta) \wedge \omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) - \int_{\partial D} g(\zeta) \wedge \int_0^1 \Omega(H) \tag{12}$$

证　在定理 1 的式(10)中, 令 $g = \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\mathrm{d}\bar{\zeta}$, 对式(10)双边施以 $\bar{\partial}_z$, 由于 $\Omega(G)$ 是一离散的局部全纯核, 它仅在 $\zeta \in \partial D$ 上至多有 $2n-1$ 阶的可积奇性, 且 $\bar{\partial}_z \Omega(G) = 0$. 故式(12)是 $\bar{\partial} u = g$ 的一个局部 C^∞ 的可微离散解.

参考文献:

[1] Lin Liangyu. Bochner-Martinelli formula with discrete holomorphic kernel[J]. Chinese Science Bulletin, 1997, 42(6): 447—450.

[2] 林良裕. 球垒域上的 $\bar{\partial}$ 方程[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 1997, 36(4): 503—506.

[3] 阮其华, 林良裕. 复双球垒域上具有离散局部全纯核的线性奇异积分方程[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2001, 40(6): 1 179—1 183.

[4] 甘宁, 林良裕. 有界域上具有离散全纯核的 Bochner-Henkin 公式和 $\bar{\partial}$ 方程[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2002, 41(3): 280—282.

[5] Henkin G M, Leiterer J. Theory of Functions on Complex Manifolds[M]. Berlin: Acudemie-Verlag Berlin and Birkhiuser-Verlag Boston, 1984.

[6] 林良裕, 阮其华. 有界域上的 Bochner-Henkin 公式[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 1998, 37(5): 625—628.

[7] Φvrelid N. Generators of the maximal ideals of $A(D)$[J]. Pac. J. Math., 1971, 39: 219—223.

[8] 钟同德, 黄沙. 多元复分析[M]. 石家庄: 河北教育出版社, 1990.

[9] 林良裕, 邱春晖. 闭逐块光滑流形上奇异积分的 Poincaré-Bertrand 公式[J]. 数学学报, 2002, 45(4): 759—772.

The Cauchy Formula with Discrete Kernel and $\bar{\partial}$-Equation on a Bounded Domain

HUANG Yu-shen[1], LIN Liang-yu[2]

(1. Dept. of Math., Putian Univ., Putian 351100, China;

2. Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

Abstract: Let D be a bounded domain with $C^{(1)}$ boundary in C^n. The authors use the locally finite open coverring of the countable strictly pseudoconvex to define a new partitions of unity of σ point finite local holomorphic, constructed a generalized Cauchy integral formula with discrete local holomorphic kernel on the bounded domain D and applied it to solving the $\bar{\partial}$-equation.

Key words: bounded domain; discrete kernel; integral formula; $\bar{\partial}$-equation