第 47 卷　第 3 期
2008 年 5 月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol. 47　No. 3
May 2008

三角范畴的有界 t-结构与遗传 Abel 范畴

刘宏锦[1*], 陈　娟[2**]
(1. 厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005; 2. 集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

摘要: 研究三角范畴有界 t-结构的心. 证明了对于给定的三角范畴 D 的有界 t-结构($D^{\leqslant 0}$, $D^{\geqslant 0}$), 如果对于 D 中任意的一个不可分解对象 X, 满足 $X\in D^{\leqslant 0}$, 或者 $X\in D^{\geqslant 1}$, 则此 t-结构的心是遗传的. 进一步地, 得到了由遗传 Abel 范畴 A 的可裂挠对(T, F)导出的 $D^b(A)$上有界 t-结构的心也是遗传的 Abel 范畴.

关键词: 有界 t-结构; 心; 遗传
中图分类号: O 154.1　　文献标识码: A　　文章编号: 0438-0479(2008)03-0305-03

三角范畴的 t-结构是由 Beilinson, Bernstain 和 Deligne 在上个世纪 80 年代初提出的[1]. 三角范畴的 t-结构可看做 Abel 范畴的挠理论在三角范畴上的推广[2]. Happel 等人考虑了 t-结构和挠理论的关系. 现在, 有界 t-结构成为研究代数簇上的拟凝聚层的有界导出范畴的一个重要工具. 遗传 Abel 范畴 A 的有界导出范畴 $D^b(A)$ 具有一个好的结构: $D^b(A)=\bigcup_{i\in Z}A[i]$, 其中 $A[i]$ 是 A 的第 i 次 shift. Reiten 和 van der Bergh 证明了具有某些性质的遗传 Abel 范畴能够刻画光滑投射曲线上的凝聚层范畴[3].

本文考虑有界 t-结构的心是遗传 Abel 范畴的一种情况. 考虑的范畴总是 Krull-Schmidt 范畴, 则知任意一个对象可以分解成一些不可分解对象的直和, 且在同构意义下这个分解是唯一. [1] 表示三角范畴的 shift 函子.

1　预备知识与主要结论

首先, 我们回顾三角范畴 t-结构的定义及一些与本文相关的 t-结构的性质.

定义 1[1]　设 D 是三角范畴, D 上的 t-结构是一个加法满子范畴对($D^{\leqslant 0}, D^{\geqslant 0}$), 满足以下 3 个条件.

(i) $D^{\leqslant 0}\subseteq D^{\leqslant 1}$, $D^{\geqslant 0}\supseteq D^{\geqslant 1}$;

(ii) $\mathrm{Hom}_D(X, Y)=0$, 对于 $\forall X\in D^{\leqslant 0}, Y\in D^{\geqslant 1}$;

(iii) 对于 D 中的任意一个对象 X, 存在三角 $A\to X\to B\to A[1]$, 其中 $A\in D^{\leqslant 0}, B\in D^{\geqslant 1}$.

这里, $D^{\leqslant n}:=D^{\leqslant 0}[-n]$, $D^{\geqslant n}:=D^{\geqslant 0}[-n]$, $\forall n\in Z$. 称 $D^{\geqslant 0}\cap D^{\leqslant 0}$ 是 t-结构($D^{\leqslant 0}, D^{\geqslant 0}$)的心.

命题 1[1]　设($D^{\leqslant 0}, D^{\geqslant 0}$)是三角范畴 D 的 t-结构, 则对于任意的 $n\in Z$, 下列结论成立.

(i) 嵌入函子: $D^{\leqslant n}\to D$ 存在右伴随 $\tau_{\leqslant n}: D\to D^{\leqslant n}$;

(ii) 嵌入函子: $D^{\geqslant n}\to D$ 存在左伴随 $\tau_{\geqslant n}: D\to D^{\geqslant n}$.

定理 1[1]　设 A 是三角范畴 D 的 t-结构($D^{\leqslant 0}$, $D^{\geqslant 0}$)的心, 则 A 是 Abel 范畴, 且 $H^0=\tau_{\geqslant 0}\tau_{\leqslant 0}: D\to A$ 是上同调函子, 即对于 D 中任意一个三角: $A\to B\to C\to A[1]$, 则 $H^0(A)\to H^0(B)\to H^0(C)$是 A 的正合列.

注　对于任意的 $X\in D$, 记 $H^i(X):=H^0(X[i])$, 则对于 D 中的任意一个三角: $A\to B\to C\to A[1]$, 有 A 中的正合列:

$$\cdots\to H^{i-1}(C)\to H^i(A)\to H^i(B)\to H^i(C)\to H^{i+1}(A)\to\cdots.$$

定义 2[4]　设($D^{\leqslant 0}, D^{\geqslant 0}$)三角范畴 D 上的 t-结构, 若满足 $\bigcup_{p\in Z}D^{\leqslant p}=D$, 且 $\bigcup_{p\in Z}D^{\geqslant p}=D$, 则称($D^{\leqslant 0}$, $D^{\geqslant 0}$)是 D 上的有界 t-结构.

例　(i)[4] 设 A 是 Abel 范畴, 则 A 的有界导出范畴 $D^b(A)$上的标准 t-结构($D^{\leqslant 0}, D^{\geqslant 0}$)是有界的. 这里

$$D^{\leqslant 0}=\{X^\cdot \mid H^j(X^\cdot)=0,\ \forall j>0\},$$
$$D^{\geqslant 0}=\{X^\cdot \mid H^j(X^\cdot)=0,\ \forall j<0\}.$$

(ii)[5] 设 A 是三角范畴 D 上的有界 t-结构的心, (T, F)是 Abel 范畴 A 的挠对, 则(T, F)可导出 D 上的另一个 t-结构($D^{\leqslant 0}, D^{\geqslant 0}$), 这里

$$D^{\leqslant 0}=\{X\in D\mid H^i(X)=0,\ \forall i>0, H^0(X)\in T\},$$
$$D^{\geqslant 0}=\{X\in D\mid H^i(X)=0,\ \forall i<-1, H^{-1}(X)\in F\},$$

其中 H^j 是最先给定的有界 t-结构的上同调函子, 并且($D^{\leqslant 0}, D^{\geqslant 0}$)也是 D 上的有界 t-结构.

注　设($D^{\leqslant 0}, D^{\geqslant 0}$)是三角范畴 D 上的有界 t-结构, 根据文献[4], 对于 $\forall n\in Z$, 有 $D^{\leqslant n}=\{X\in D\mid H^p$

收稿日期: 2007-05-18
基金项目: 国家自然科学基金(10671161)资助
*现在龙岩学院数学与计算机科学学院工作
**通讯作者: cjdreams@163.com

$(X)=0,\ \forall p>n\}$, $D^{\geqslant n}=\{X\in D\mid H^p(X)=0,\ \forall p<n\}$. 从而可以得到以下两个引理.

引理 1 设 A 是三角范畴 D 上的有界 t-结构 $(D^{\leqslant 0},D^{\geqslant 0})$ 的心, 则 $A=\{X\in D\mid H^j(X)=0,\ \forall j\neq 0\}$.

引理 2 设 A 是三角范畴 D 上的有界 t-结构 $(D^{\leqslant 0},D^{\geqslant 0})$ 的心, 则 A 作为三角范畴 D 的满子范畴对直和项封闭.

本文的主要结果是:

定理 2 设 A 是三角范畴 D 上的有界 t-结构 $(D^{\leqslant 0},D^{\geqslant 0})$ 的心, 若对于 D 中的任意一个不可分解对象 X, 满足 $X\in D^{\leqslant 0}$, 或者 $X\in D^{\geqslant 1}$, 则 A 是遗传的.

2 主要结果的证明

定义 3① 设 A 是 Abel 范畴, 如果对于任意 $X,Y\in A$, 有 $\mathrm{Ext}_A^n(X,Y)=0,\ \forall n\geqslant 2$, 则称 A 是遗传的.

在证明定理 2 之前, 我们还需要以下几个引理.

引理 3[3] 设 A 是三角范畴 D 上的 t-结构 $(D^{\leqslant 0},D^{\geqslant 0})$ 的心, 如果 $\mathrm{Hom}_D(A,A[n])=0$, 这里 $n\neq 0,1$, 则 A 是遗传 Abel 范畴.

引理 4① 设 $X\xrightarrow{(\mu_1,\mu_2)^\tau}Y_1\oplus Y_2\xrightarrow{(\nu_1,\nu_2)}Z\xrightarrow{\omega}X[1]$ 是三角, 其中 $(\mu_1,\mu_2)^\tau$ 表示 (μ_1,μ_2) 的转置.

(1) 如果 $\mu_i=0$, 则 ν_i 是可裂单的, $i=1,2$;

(2) 如果 $\nu_i=0$, 则 μ_i 是可裂满的, $i=1,2$.

引理 5 设 Ω: $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{(\nu_1,0)^\tau}Z_1\oplus Z_2\xrightarrow{(\omega_1,\omega_2)}X[1]$ 是三角, 且 ν_1 是可裂满的, 则 Ω 同构于如下的三角

$$X\xrightarrow{(0,\mu_2)^\tau}Z_1\oplus Y_2\xrightarrow{\nu}Z_1\oplus Z_2\xrightarrow{(\omega_1,\omega_2)}X[1].$$

这里 $\nu=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, 且 μ_2 是可裂满的.

证明 将 $\nu_1: Y\to Z_1$ 嵌入一个三角, 记为: $Y_2\xrightarrow{\alpha}Y\xrightarrow{\nu_1}Z_1\xrightarrow{\gamma}Y_2[1]$, 由于 ν_1 是可裂满的, 则 $\gamma=0$, 且 α 是可裂单的, 即存在 α': $Y\to Y_2$, 使得 $\alpha'\alpha=1_{Y_2}$. 从而有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
Y_2 & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\nu_1} & Z_1 & \xrightarrow{0} & Y_2[1]\\
\| & & \downarrow{\scriptstyle(\nu_1,\alpha')^\tau} & & \| & & \|\\
Y_2 & \xrightarrow{(0,1)^\tau} & Z_1\oplus Y_2 & \xrightarrow{(1,0)} & Z_1 & \xrightarrow{0} & Y_2[1]
\end{array}\qquad (*)$$

由于交换图 $(*)$ 中的行均为三角, 则 $(\nu_1,\alpha')^\tau$ 是同构. 令 $\mu_2=\alpha'\mu$, 则 $(\nu_1,\alpha')^\tau\mu=(\nu_1\mu,\alpha'\mu)^\tau=(0,\mu_2)^\tau$. 所以有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\mu} & Y & \xrightarrow{(\nu_1,0)^\tau} & Z_1\oplus Z_2 & \xrightarrow{(\omega_1,\omega_2)} & X[1]\\
\| & & \downarrow{\scriptstyle(\nu_1,\alpha')^\tau} & & \| & & \|\\
X & \xrightarrow{(0,\mu_2)^\tau} & Z_1\oplus Y_2 & \xrightarrow{\nu} & Z_1\oplus Z_2 & \xrightarrow{(\omega_1,\omega_2)} & Y_2[1]
\end{array}\qquad (**)$$

这里 $\nu=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, 因为 $(\nu_1,\alpha')^\tau$ 是同构, 且交换图 $(**)$ 中第 1 行是三角, 所以第 2 行也是三角, 且同构于三角 Ω. 再由引理 4, μ_2 是可裂满的.

定理 2 的证明 根据引理 3, 如果能够证明结论: 若存在非零态射 $\mu\in\mathrm{Hom}_D(A[s],A)$, 则 $s=0$ 或 $s=-1$. 那么定理 2 成立.

设 $X,Y\in A$, 考虑非零态射 $\mu: X[s]\to Y$, 显然 $s\leqslant 0$. 这是因为如果 $s>0$, 根据定义 1, 有 $X\in D^{\leqslant 0}$, $Y[-s]\in D^{\geqslant s}\subseteq D^{\geqslant 1}$, 从而 $\mu\in\mathrm{Hom}_D(X[s],Y)=\mathrm{Hom}_D(X,Y[-S])=0$, 这与 $\mu\neq 0$ 矛盾, 所以 $s\leqslant 0$. 记 μ 嵌入 D 中的三角为 (Δ): $X[s]\xrightarrow{\mu}Y\xrightarrow{\nu}Z\xrightarrow{\omega}X[s+1]$, 由于 D 中的任意一个不可分解对象 X, 要么 $X\in D^{\leqslant 0}$, 要么 $X\in D^{\geqslant 1}$, 则可令 $Z=Z_1\oplus Z_2$, 其中 $Z_1\in D^{\leqslant 0}$, $Z_2\in D^{\geqslant 1}$, 则 (Δ) 即为如下三角:

$$X[s]\xrightarrow{\mu}Y\xrightarrow{(\nu_1,\nu_2)^\tau}Z_1\oplus Z_2\xrightarrow{(\omega_1,\omega_2)}X[s+1].$$

由于 $Y\in D^{\leqslant 0}$, $Z_2\in D^{\geqslant 1}$, 则 $\nu_2=0$, 根据引理 4, ω_2 是可裂单的. 再由引理 2, $Z_2\in A[s+1]=D^{\geqslant -(s+1)}\cap D^{\leqslant -(s+1)}$.

我们断言 $Z_2=0$. 否则, 由于 $Z_2\in D^{\geqslant 1}$, 且 $Z_2\in D^{\leqslant -(s+1)}$, 根据 t-结构的定义 $\mathrm{Hom}_D(D^{\leqslant 0},D^{\geqslant 1})=0$, 若 $Z_2\neq 0$, 则必须有 $D^{\leqslant -(s+1)}$ 严格包含 $D^{\leqslant 0}$, 即有 $-(s+1)\geqslant 1$, 从而 $s\leqslant -2$, 此时 $X[s+1]\in D^{\geqslant -(s+1)}\subseteq D^{\geqslant 1}$, 而 $Z_1\in D^{\leqslant 0}$, 所以 $\omega_1=0$, ν_1 是可裂满的, 再由引理 5, (Δ) 同构于如下形式的三角:

$$X[s]\xrightarrow{(0,\mu_2)^\tau}Z_1\oplus Y_2\xrightarrow{\sigma}Z_1\oplus Z_2\xrightarrow{(\omega_1,\omega_2)}X[s+1],$$

这里 $\sigma=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, 存在同构 $\varphi: Y\to Z_1\oplus Y_2$, 使得 $\varphi\mu=(0,\mu_2)^\tau$, 且 μ_2 是可裂满的. 从而 Y_2 是 $X[s]$ 的直和项, 由 $s\leqslant -2$ 及引理 2, $Y_2\in A[s]=D^{\geqslant -s}\cap D^{\leqslant -s}$. 又 Y_2 是 Y 的直和项, $Y_2\in A\subseteq D^{\leqslant 0}$, 所以 $Y_2=0$, 这样得到 $\mu_2=0$, 所以 $\mu=0$, 这与 $\mu\neq 0$ 矛盾. 因此, $Z_2=0$.

$Z_2=0$, 则 (Δ) 即为三角: $X[s]\xrightarrow{\mu}Y\xrightarrow{\nu_1}Z_1\xrightarrow{\omega_1}X[s+1]$, 这里 $Z_1\in D^{\leqslant 0}$. 考虑以下两种情况:

(i) 如果 $\omega_1=0$, 则 μ 是可裂单的, 即 $X[s]$ 是 Y 的直和项, 而 $X,Y\in A$, 所以 $X[s]\in A$, $s=0$.

(ii) 如果 $\omega_1\neq 0$, 则 $s+1\geqslant 0$. 否则, 若 $s+1\leqslant -1$, 则 $X[s+1]\in D^{\geqslant -(s+1)}\subseteq D^{\geqslant 1}$, 而 $Z_1\in D^{\leqslant 0}$, 所以 $\omega_1=0$, 矛盾. 因此, $s+1\geqslant 0$, 又 $s\leqslant 0$, 从而 $s=0, 1$.

综合 (i)(ii), 定理 2 得证.

---

① Ringel C M. Hereditary triangulated categories. Comp Math, 2006.

推论 1　设 A 是代数闭域 k 上的有限维代数, 则下列结论等价.

(i) A 是遗传的;

(ii) 设 $X^{\cdot}$ 是 A 的有界导出范畴 $D^b(\text{mod}-A)$ 的任意一个不可分解对象, 则 $X^{\cdot}$ 同构于一个 stalk 复形.

证明　(i) ⇒ (ii). 参见文献[2].

(ii) ⇒ (i). 设 $(D^{\leqslant 0}, D^{\geqslant 0})$ 是 $D^b(\text{mod-}A)$ 上的标准 t-结构, 即有

$D^{\leqslant 0} = \{X^{\cdot} \mid H^j(X^{\cdot}) = 0,\ \forall j > 0\}$,

$D^{\geqslant 0} = \{X^{\cdot} \mid H^j(X^{\cdot}) = 0,\ \forall j < 0\}$.

对于 $D^b(\text{mod-}A)$ 中的任意一个不可分解对象 $X^{\cdot}$, 若 $X^{\cdot}$ 同构于 stalk 复形, 则存在 $k \in Z$, 使得 $H^k(X^{\cdot}) \neq 0$, 但对于任意整数 j, 若 $j \neq k$, 则 $H^j(X^{\cdot}) = 0$. 由于 $(D^{\leqslant 0}, D^{\geqslant 0})$ 是 $D^b(\text{mod-}A)$ 上的有界 t-结构, 所以 $X^{\cdot} \in D^{\geqslant k} \cap D^{\leqslant k}$. 如果 $k \geqslant 1$, 则 $X^{\cdot} \in D^{\geqslant k} \subseteq D^{\geqslant 1}$; 如果 $k \leqslant 0$, 则 $X^{\cdot} \in D^{\leqslant k} \subseteq D^{\leqslant 0}$. 从而, 由定理 2, $\text{mod-}A = D^{\leqslant 0} \cap D^{\geqslant 0}$ 是遗传 Abel 范畴.

推论 2　设 A 是遗传 Abel 范畴, (T, F) 是 A 的可裂挠对, 即 (T, F) 是满足对于 A 中的任意一个不可分解对象 X, $X \in T$, 或者 $X \in F$ 的挠对, 则由 (T, F) 导出的 $D^b(A)$ 上有界 t-结构的心也是遗传的.

证明　设 $(D^{\leqslant 0}, D^{\geqslant 0})$ 是 $D^b(A)$ 上的标准 t-结构, 则对于 $D^b(A)$ 中的任意一个不可分解对象 X, 显然满足 $X \in D^{\leqslant 0}$, 或者 $X \in D^{\geqslant 1}$. 记 $(D_1^{\leqslant 0}, D_1^{\geqslant 0})$ 为由可裂挠对 (T, F) 导出的 $D^b(A)$ 上的有界 t-结构, 即有

$D_1^{\leqslant 0} = \{X \in D^b(A) \mid H^i(X) = 0,$
$\quad \forall i > 0, H^0(X) \in T\}$,

$D_1^{\geqslant 0} = \{X \in D^b(A) \mid H^i(X) = 0,$
$\quad \forall i < -1, H^{-1}(X) \in F\}$,

这里 H^j 是 $(D^{\leqslant 0}, D^{\geqslant 0})$ 的上同调函子. 由 t-结构的定义, 不难证明对于 $p \in Z$, $D_1^{\leqslant p}$ 和 $D_1^{\geqslant p}$ 具有如下的形式:

$D_1^{\leqslant p} = \{X \in D^b(A) \mid H^i(X) = 0,$
$\quad \forall i > p, H^0(X) \in T\}$,

$D_1^{\geqslant p} = \{X \in D^b(A) \mid H^i(X) = 0,$
$\quad \forall i < p-1, H^{-1}(X) \in F\}$,

所以, $D^{\leqslant -1} \subseteq D_1^{\leqslant 0} \subseteq D^{\leqslant 0}$, $D^{\geqslant 1} \subseteq D_1^{\geqslant 1} \subseteq D^{\geqslant 0}$.

因此, 对于 $D^b(A)$ 中的任意一个不可分解对象 X, 若 $X \in D^{\geqslant 1}$, 则 $X \in D_1^{\geqslant 1}$; 若 $X \in D^{\leqslant 0}$, 假设 $X \notin D_1^{\leqslant 0}$, 由 $D^{\leqslant -1} \subseteq D_1^{\leqslant 0}$, 可得 $X \notin D^{\leqslant -1}$, 即 $X[-1] \notin D^{\leqslant 0}$. 所以, $X[-1] \in D^{\geqslant 1}$, 即 $X \in D^{\geqslant 0}$. 从而 $X \in D^{\leqslant 0} \cap D^{\geqslant 0} = A$, $H^0(X) = X \notin T$. 又 (T, F) 是可裂挠对, 所以 $H^0(X) = X \in F$, 进一步, 可得 $X \in D_1^{\geqslant 1}$. 这样, 证明了或者 $X \in D_1^{\leqslant 0}$, 或者 $X \in D_1^{\geqslant 1}$. 根据定理 2, 推论 2 成立.

参考文献:

[1] Beilinson A, Bernstein J, Deligne P. Faisceaux pervers, astrisque[J]. Analyse et Topologie Sur Les Espaces Singuliers, 1982, 100: 1-172.

[2] Happel D. Triangulated categories in the representation theories of finite dimensional algebra[C] //Lecture Notes in Math. New York: Cambridge University Press, 1988.

[3] Reiten I, Van den Bergh. Noetherian hereditary abelian categories satisfying Serre duality[J]. J Amer Math Soc, 2002, 15: 295-366.

[4] Dragan Milicić. Lectures on derived categories[EB/OL]. http: //www.math.utah.edu/milicic/dercat.pdf.

[5] Happel D. On the derived category of a finite-dimensional algebra[J]. Comment Math Helv, 1987, 62: 339-389.

The Bounded t-Structure of Triangulated Categories and Hereditary Abelian Categories

LIU Hong-jin[1 *], CHEN Juan[2 **]

(1. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China;
2. College of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The t-structure of triangulated categories is the promotion of the torsion theory of abelian categories on the triangulated categories, which plays an important role in the study of the algebraic geometry. The heart of the bounded t-structure of triangulated categories is studied in this paper. It is proved that any given bounded t-stucture $(D^{\leqslant 0}, D^{\geqslant 0})$ on D satisfies that $X \in D^{\leqslant 0}$, or $X \in D^{\geqslant 1}$, for any indecomposable object X in D. Then the heart of the certain t-structure is hereditary. Moreover, if (T, F) is the splited torsion theory of the hereditary abelian category A, then the heart of the bounded t-structure on the bounded derived category $D^b(A)$ deduced by (T, F) is also hereditary abelian category.

Key words: bounded t-structure; heart; hereditary