第 33 卷第 8 期　数学的实践与认识　Vol.33 No.8
2003 年 8 月　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　August, 2003

跳跃扩散型离散算术平均亚式期权的近似价格公式

刘智华，　李时银

(厦门大学数学系，　厦门　361005)

摘要：　在标的资产价格遵循跳跃扩散过程条件下，研究没有封闭形式解的离散算术平均亚式期权，运用二阶 Edgeworth 逼近得到离散算术平均亚式期权的近似价格公式.

关键词：　亚式期权；Ito-Skorohod 随机微分方程；Edgeworth 级数展开

1　引　　言

亚式期权是平均期权，其到期收益依赖某种形式的整个期权有效期内标的资产的平均价格，大多数亚式期权是欧式的. 亚式期权是 OTC 市场上广受交易者青睐的金融工具，在市场上交易的绝大部分亚式期权都是标的算术平均. 经常发生的情况是：交易者有兴趣对某时段内的商品的平均价格套期保值，而不是仅考虑该时段终点的价格. 通过持有一个合适的亚式期权可以对冲平均价格的风险，可以避开接近该时段末期时的价格操纵. 人们已提出好多种平均期权. 对它们的容易理解的概括可以在 Boyle(1993) 和 Zhang(1994) 的文章中找到[1]. 用得最普遍的样本平均是离散算术平均，然而这种类型的亚式期权的定价在分析上很难处理. Jarrow 和 Rudd(1982) 在股票价格遵循几何 Brown 运动条件下给出算术平均亚式期权的近似价格公式[2]. 但在实践中碰到的问题是：如果资产价格的路径不连续怎么办? 所谓跳跃扩散是普通的(路径连续的) 扩散过程和一个在随机时间发生跳跃(跳跃幅度也是随机的) 的跳跃过程的结合. 显然这种过程能更准确的描述真实的资产价格路径. 本文用跳跃扩散过程来描述标的资产的价格运动，在此前提下，用 Edgeworth 二阶级数展开给出离散算术平均亚式期权的近似定价公式.

2　市场模型和风险中性过程

假设市场上交易的某标的资产的价格 $S(t)(0\leq t\leq T)$ 的变化遵循跳跃扩散过程，即满足如下 Ito-Skorohod 随机微分方程：

$$\begin{cases} ds(t) = s(t)[\mu dt + \sigma dw(t) + (J-1)dq(t)] \\ s(0) = s_0 \qquad s(T) = s_T \end{cases} \quad 0\leq t\leq T \tag{1}$$

其中 $\omega(t)$ 是 Wiener 过程，$\omega(t)\sim N(0,t)$；$\ln J\sim N(a,\theta^2)$ 在 Poisson 的随机时刻，发生一个量为 $J-1$ 的跳跃，使得资产价格从 S 变为 SJ；$dq(t)$ 是一个 Poisson 随机变量，

$$dq(t) = \begin{cases} 1 & \text{发生概率为 } \lambda dt \\ 0 & \text{发生概率为 } 1-\lambda dt \end{cases}$$

$E(dq(t)) = \lambda dt$；$dq(t)$，$\omega(t)$ 和 J 是相互独立的，另外各次跳跃对应的幅度也是相互独立

收稿日期：2002-10-22

的, 跳跃发生的频次由 Poisson 随机变量 $dq(t)$ 决定,

$$P(q(t)=m)=\frac{1}{m!}(\lambda t)^m e^{-\lambda t},\quad m=0,1,2,\cdots$$

其中 μ, $\sigma\lambda$, a, θ, J 是常数型参数. 则我们可以得到方程(1) 的解为[3]:

$$s(t)=s_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\omega(t)+\sum_{k=1}^{q(t)}\nu_k} \tag{2}$$

其中 $\nu_k\sim N(a,\theta^2)$, $k=1,2,\cdots,q(t)$ 且两两相互独立.

由于在风险中性世界中要求: $E\left[\frac{ds(t)}{s(t)}\right]=r\,dt$, 又从(1) 我们可以得到:

$$E\left[\frac{ds(t)}{s(t)}\right]=\mu dt+\sigma E(d\omega(t))+E((J-1)dq(t))=\mu dt+(E(J)-1)\lambda dt \tag{3}$$

在 $\ln J\sim N(a,\theta^2)$ 的条件下, 我们可知 $E(J)=e^{a+\frac{\theta^2}{2}}$, 代入(3) 中可以得到:

$$E\left[\frac{ds(t)}{s(t)}\right]=\mu dt+\left(e^{a+\frac{\theta^2}{2}}-1\right)\lambda dt \tag{4}$$

综合以上, 可知取 $\mu=r-\left(e^{a+\frac{\theta^2}{2}}-1\right)\lambda$ 时 $S(t)$ 是风险中性过程, 因此可以采用风险中性定价方法[4]～[6].

3 算术平均亚式期权及其近似价格公式

考虑一个采用离散算术平均的平均资产价买入期权, 它的到期收益是:

$$c(T)=\max(A(T)-X,0) \tag{5}$$

其中 X 是交割价格; $t_0=0$ 是当前时刻, $t_i(1\le i\le n)$ 是标的资产价格的观察取样时刻, 所以

$$A(T)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}s(t_i)^{1} \tag{6}$$

$t_i\in[0,T]$, $\Delta t_i=\frac{T}{N}=t_i-t_{i-1}$, 即在期权持有期间内每隔 $\frac{T}{N}$ 时段取得一次股票价格, T 是期权到期日. 利用风险中性定价方法, 则在 $t_0=0$ 时刻的离散算术平均资产价买入期权的价格为:

$$c(s_0,A,0)=e^{-rT}E[\max(A(T)-X,0)] \tag{7}$$

其中 E 是风险中性世界的期望算子.

当 $s(t)$ 遵循(1) 中跳跃扩散过程时, $A(T)$ 的概率分布没有合适的精确表达式. 导出近似的解析价格公式的最好方法是 Edgeworth 级数展开(Jarrow 和 Rudd, 1982), 用对数正态分布来近似逼近 $A(T)$ 的真实分布[6]. Edgeworth 级数展开十分类似于函数论中的解析函数的 Taylor 级数展开. 假设真实的和近似的分布的各阶矩都可以计算出来, 那么从理论上讲, 一个任意的分布都可以用另外的分布逼近到任意的精确度. 对离散算术平均亚式期权的定价问题, 使用对数正态分布作为近似分布是最方便的. 假设我们选择(作为近似的) 对数正态分布的参数使得它的前两阶矩与真实分布的前两阶矩匹配, 那么做相应的二阶

---

[1] 这里仅考虑这种较为特殊的观察取样方式, s_0 是已知的标的资产价格, 为了避免将过去的标的资产价格作为随机变量, s_0 不计入 $A(T)$ 中. 其它形式的观察取样的算术平均都可以将它们转化成这种形式, 具体讨论可见参考文献[1]

Edgeworth 级数展开后, 可以用近似分布去逼近真实分布.

因此我们用对数正态分布 $\hat{F}$ 逼近 $A(T)$ 的真实分布. 假设近似分布 $\ln\hat{F}$ 是均值和方差分别为 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}^2$ 的正态分布, 用 $\ln\hat{F}$ 逼近 $\ln A(T)$ 的真实分布, 则期权定价公式(7) 就可变为

$$c(s_0, A, 0) = e^{-rT}E[\max(A(T) - X, 0)] \approx e^{-rT}\hat{E}[\max(A(T) - X, 0)] \tag{8}$$

其中 $\hat{E}$ 是 $A(T)$ 在近似分布 $\hat{F}$ 下的风险中性期望. 所以:

$$\begin{cases} \hat{E}(A(T)) = e^{\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2} \\ \hat{E}(A^2(T)) = e^{2\hat{\mu} + 2\hat{\sigma}^2} \end{cases} \tag{9}$$

我们将 $A(T)$ 用 Edgeworth 二阶逼近, 这可以通过假设服从对数正态分布 $\hat{F}$ 的第一、第二阶矩和 $A(T)$ 在真实分布下的前两阶矩相等而得到, 即设:

$$\begin{cases} \hat{E}(A(T)) = E(A(T)) \\ \hat{E}(A^2(T)) = E(A^2(T)) \end{cases} \tag{10}$$

从(9) 和(10) 我们解得:

$$\begin{cases} \hat{\mu} = 2\ln E(A(T)) - \frac{1}{2}\ln E(A^2(T)) \\ \hat{\sigma}^2 = \ln E(A^2(T)) - 2\ln E(A(T)) \end{cases} \tag{11}$$

由 (8) 我们知道如果假设 $\ln\hat{F}$ 服从 $N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ 成立, 这时平均资产价买入期权的价格就可成为[6]:

$$c(s_0, A, 0) \approx e^{-rt}[\hat{E}(A(T))N(d_1) - XN(d_2)] \tag{12}$$

其中 $d_1 = \dfrac{\hat{\mu} + \hat{\sigma}^2 - \ln X}{\hat{\sigma}}$, $d_2 = d_1 - \hat{\sigma}$.

上面价格公式是对算术平均资产价买入期权真实价格的逼近. 剩下的是求出 $E(A(T))$ 和 $E(A^2(T))$.

4 求解 $E(A(T))$ 和 $E(A^2(T))$

4.1 $E(A(T))$ 的计算

由于 $s(t) = s_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\omega(t) + \sum_{k=1}^{q(t)}\nu_k}$, 且 $\omega(t)$, $q(t)$, ν_k 相互独立, 其中 $\nu_k \sim N(a, \theta^2)$, $k = 1, 2, \cdots, q(t)$ 且两两相互独立, 故

$$E\left(e^{\sum_{k=1}^{q(t)}\nu_k} \mid q(t) = m\right) = E\left(e^{\sum_{k=1}^{m}\nu_k}\right) = e^{\left(a + \frac{1}{2}\theta^2\right)m} \tag{13}$$

又有 $\omega(t) \sim N(0, t)$, 则 $E(e^{\sigma\omega(t)} \mid q(t) = m) = E(e^{\sigma\omega(t)}) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}$.

所以 $t_i \in (0, T]$ (其实 $t_i = i\dfrac{T}{N}, i = 1, 2, \cdots, N$) 时, 有

$$E\left(\frac{s(t_i)}{s_0} \mid q(t_i) = m_i\right) = E\left(e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_i + \sigma\omega(t_i) + \sum_{k=1}^{m_i}\nu_k}\right) = e^{\mu t_i + \left(a + \frac{\theta^2}{2}\right)m_i} \tag{14}$$

因此,

$$E(s(t_i) \mid q(t_i) = m_i) = s_0 e^{\mu t_i + \left(a + \frac{\theta^2}{2}\right)m_i} \tag{15}$$

又因为 $P(q(t) = m) = \dfrac{1}{m!}(\lambda t)^m e^{-\lambda t}(m = 0, 1, 2, \cdots)$, 所以我们可求得

$$
\begin{aligned}
E(s(t_i)) &= E(E(s(t_i)\mid q(t_i)=m_i)) \\
&= \sum_{m_i=0}^{\infty} s_0 e^{\mu t_i + \left(a+\frac{\theta^2}{2}\right) m_i} \frac{1}{m_i!}(\lambda t_i)^{m_i} e^{-\lambda t_i} \\
&= s_0 e^{\left(\mu + \left(e^{a+\frac{\theta^2}{2}} - 1\right)\lambda\right) t_i} = s_0 e^{r t_i}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

其中 $r = \mu + (e^{a+\frac{\theta^2}{2}} - 1)\lambda$ 所以最后我们得到:

$$
E(A(T)) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E(s(t_i)) = \frac{s_0}{N} e^{r\frac{T}{N}} \frac{1 - e^{rT}}{1 - e^{r\frac{T}{N}}} \hat{=} A_1 \tag{17}
$$

4.2　$E(A^2(T))$的计算

由于:

$$
\begin{aligned}
E(A^2(T)) &= \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} E(s(t_i)s(t_j)) \\
&= \frac{1}{N^2}\left[2\sum_{j=1}^{N}\sum_{i\le j} E(s(t_i)s(t_j)) - \sum_{i=1}^{N} E(s^2(t_i))\right]
\end{aligned}
\tag{18}
$$

先求:

$$
\begin{aligned}
& E(s(t_i)s(t_j)\mid q(t_i)=m_i,\ q(t_j)=m_j, i\le j) \\
&= E\left(s_0^2 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_i+t_j) + \sigma(\omega(t_i)+\omega(t_j)) + \sum_{k=1}^{m_i}\nu_k + \sum_{k=1}^{m_j}\nu_k}\right) \\
&= s_0^2 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_i+t_j)} E\left[e^{2\sigma\omega(t_i) + \sigma(\omega(t_j)-\omega(t_i)) + 2\sum_{k=1}^{m_i}\nu_k + \sum_{k=m_i+1}^{m_j}\nu_k}\right] \\
&= s_0^2 e^{\mu(t_i+t_j) + \sigma^2 t_i} e^{2m_i(a+\theta^2) + (m_j-m_i)\left(a+\frac{\theta^2}{2}\right)}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

其中由于 $\omega(t)$ 是 Wiener 过程, 所以 $\omega(t_i)$ 和 $(\omega(t_j) - \omega(t_i))\ (i\le j)$ 相互独立. 而且又有 $\nu_k \sim N(a,\theta^2)\ (k = 1,2,\cdots,q(t))$ 且两两相互独立, 所以 $\sum_{k=1}^{m_i}\nu_k$ 和 $\sum_{k=m_i+1}^{m_j}\nu_k$ 是相互独立的. 由于 $dq(t)$ 是一个 Poisson 随机变量, 在不相交时间段内跳跃发生的频次是相互独立的. 所以 $(q(t_j) - q(t_i))\ (i\le j)$ 和 $q(t_i)$ 是相互独立的. 又有 $\mu = r - (e^{a+\frac{\theta^2}{2}} - 1)\lambda$, 因此我们就可求得:

$$
\begin{aligned}
E(s(t_i)s(t_j)\mid i\le j) &= E(E(s(t_i)s(t_j)\mid q(t_i)=m_i,\ q(t_j)=m_j,\ i\le j)) \\
&= s_0^2 e^{\mu(t_i+t_j)+\sigma^2 t_i} E\left(e^{2m_i(a+\theta^2)} E\left(e^{(m_j-m_i)\left(a+\frac{\theta^2}{2}\right)}\right)\right) \\
&= s_0^2 e^{r t_j + \left(r + \lambda\left(e^{2(a+\theta^2)} - 2e^{a+\frac{\theta^2}{2}} + 1\right) + \sigma^2\right) t_i} \\
&= s_0^2 e^{r t_j + \eta t_i}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

其中

$$
\eta = r + \lambda\left(e^{2(a+\theta^2)} - 2e^{a+\frac{\theta^2}{2}} + 1\right) + \sigma^2
$$

特别当 $i = j$ 时, 从上面就可以求出:

$$
E(s(t_i)s(t_j)\mid i=j) = E(s^2(t_i)) = s_0^2 e^{(r+\eta)t_i} \tag{21}
$$

把以上两式代入(18)中, 我们最终可以得到:

$$
\begin{aligned}
E(A^2(T)) &= \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}E(s(t_i)s(t_j)) \\
&= \frac{2}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i\le j}E(s(t_i)s(t_j)) - \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}E(s^2(t_i))] \\
&= \frac{2s_0^2}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{j}e^{rt_j+\eta t_i} - \frac{s_0^2}{N^2}\sum_{i=1}^{N}e^{(r+\eta)t_i} \\
&= \frac{2s_0^2e^{(r+\eta)\frac{T}{N}}(1-e^{rT})}{N^2(1-e^{\eta\frac{T}{N}})(1-e^{r\frac{T}{N}})} - \frac{s_0^2e^{(r+\eta)\frac{T}{N}}(1-e^{(r+\eta)T})(1+e^{\eta\frac{T}{N}})}{N^2(1-e^{(r+\eta)\frac{T}{N}})(1-e^{\eta\frac{T}{N}})} \doteq A_2
\end{aligned}
\tag{22}
$$

4.3　$c(s_0, A, 0)$ 的计算

上面已将 $E(A(T))$ 和 $E(A^2(T))$ 求出，这里我们由(11)可以求出：

$$
\begin{cases}
\hat{\mu} = 2\ln A_1 - \frac{1}{2}\ln A_2 \\
\hat{\sigma}^2 = \ln A_2 - 2\ln A_1
\end{cases}
\tag{23}
$$

以及由(10)中可知：

$$
\hat{E}(A(T)) = E(A(T)) = A_1 \tag{24}
$$

最后离散算术平均买入期权的近似价格公式(12)可以变为：

$$
c(s_0, A, 0) \approx e^{-rT}[\hat{E}(A(T))N(d_1) - XN(d_2)] = e^{-rT}[A_1N(d_1) - XN(d_2)] \tag{25}
$$

其中：

$$
d_1 = \frac{\hat{\mu} + \hat{\sigma}^2 - \ln X}{\hat{\sigma}}, \qquad d_2 = d_1 - \hat{\sigma}
$$

$$
\begin{cases}
\hat{\mu} = 2\ln A_1 - \frac{1}{2}\ln A_2 \\
\hat{\sigma}^2 = \ln A_2 - 2\ln A_1
\end{cases}
$$

$$
A_1 = \frac{s_0}{N}e^{r\frac{T}{N}}\frac{1-e^{rT}}{1-e^{r\frac{T}{N}}}
$$

$$
A_2 = \frac{2s_0^2e^{(r+\eta)\frac{T}{N}}(1-e^{rT})}{N^2(1-e^{\eta\frac{T}{N}})(1-e^{r\frac{T}{N}})} - \frac{s_0^2e^{(r+\eta)\frac{T}{N}}(1-e^{(r+\eta)T})(1+e^{\eta\frac{T}{N}})}{N^2(1-e^{(r+\eta)\frac{T}{N}})(1-e^{\eta\frac{T}{N}})}
$$

$$
\eta = r + \lambda(e^{2(a+\theta^2)} - 2e^{a+\frac{\theta^2}{2}} + 1) + \sigma^2
$$

从上面结果中我们知道只要能够估计出 $r, \sigma, a, \theta, \lambda$ 以及知道期权的时间长度 T，交割价格 X，观察取样的次数 N，就可以得到相应的离散算术平均资产价买入期权的价格近似公式．(常数 $\sigma, a, \theta, \lambda$ 的估计可参考文献[4])

4.4　推广到 $p(s_0, A, 0)$

同时使用买入卖出平价关系，我们可以得到相应的离散算术平均资产价卖出期权的价格近似公式为：

$$
\begin{aligned}
p(s_0, A, 0) &= c(s_0, A, 0) + e^{-rT}[X - E(A(T))] \\
&\approx e^{-rT}[XN(-d_2) - A_1N(-d_1)]
\end{aligned}
\tag{26}
$$

其中 A_1, d_1, d_2 的表达式同上．

参考文献:

[1] Kwok Y K. Mathematical Model of Financial Derivatives[M]. Springer, London, 2000.

[2] Zhang P. Extoic Options[M]. World Scientific Publishing Co pet Ltd, Singapore, 1997.

[3] Snyder D L. Stochastic Point Processes[M]. the publishing of People's Education, Beijing, 1982.

[4] 李时银. 一类多资产跳跃扩散期权定价模型[J]. 数学, 力学, 物理学, 高新技术研究进展, 2002, 9: 48—53.

[5] 李时银. 跳跃扩散型几何平均亚式期权价格公式[C]. CSIAM2002 论文集, 409—416, Research Information Ltd. 北京.

[6] 李时银. 期权定价与组合选择-金融数学与金融工程的核心[M]. 厦门大学出版社, 2002.

[7] John C. Hull, Options, Futures, and Other Derivatives[M]. 华夏出版社, 2000.

The Approximate Analytic Price Formulas of Asian Options with Discrete Arithmetic Averaging in the Jump-diffuse Process

LIU Zhi-hua, LI Shi-yin

(Department of Mathematics, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: When the underlying asset price follows the jump-diffuse process, the most common type of Asian options are the average value options whose terminal payoff is determined by the discrete arithmetic average of the past prices. The valuation problem of these options is difficult for the sum of the past prices has no close form representation. The best approach for deriving approximate analytic price formulas is to use Edgeworth series expansion to approximate.

Keywords: asian option; ito-skorohod stochastic partial differential equation; edgeworth series expansion