第 46 卷　第 5 期
2007 年 9 月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol.46　No.5
Sep. 2007

James 有限表示定理的推广

程 庆 进
(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 超能和有限表示是研究超自反 Bananch 空间的两个重要工具, 而 James 表示定理是建立超自反 Banach 空间有限树特征的桥梁. 本文首先引入了 Banach 空间中两集合之间有限表示的概念, 其可视作两空间之间有限表示概念的推广, 然后利用超能和推广的有限表示将空间上的 James 有限表示定理推广到非空凸子集上.

关键词: 超能; Banach 空间
中图分类号: O 177.2　　文献标识码: A　　文章编号: 0438-0479(2007)05-0605-03

1 介绍和定义

James 在 1972 年[1] 用有限表示定理(定理 1)得到了超自反空间重要的树特征定理: Banach 空间 X 为超自反的当且仅当其不具有有限树性质. 本文用超滤子将有限表示定理推广到空间的非空凸集上(定理 5).

定义 1　设 X, Y 为 Banach 空间, $A\subset X, B\subset Y$ 为两个凸集. 称 A 在 B 中有限表示(简记为: $A\xrightarrow{f\cdot r}B$), 如果对每个 $\varepsilon>0$ 及 A 中的每个有限维单纯形 C, 存在仿射映射 $T: C\to B$, 使得

$$(1-\varepsilon)\|x-y\|\leqslant\|Tx-Ty\|\leqslant(1+\varepsilon)\|x-y\|,\ \forall x,y\in C.$$

定义 2　设 X 为一个 Banach 空间, $C\subset X$ 为一个非空凸集. 称 C 具有有限树性质, 如果存在 $\varepsilon>0$ 使得对每个 $n\in N$ 可在 C 中找到 2^n 个点 $(x_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n})_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}$ 满足对每组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k=\pm1$, $1\leqslant k<n$,

$$\|x_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k,-1}-x_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k,+1}\|\geqslant\varepsilon$$

且

$$x_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k}=\frac{1}{2}(x_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k,-1}+x_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k,+1}).$$

定义 3　设 X 为一个 Banach 空间, $C\subset X$ 为一个非空凸集. 称 C 具有无限树性质, 如果存在 $\varepsilon>0$ 及 C 中一列点 $(x_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n})_{n\geqslant1,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}$ 满足对每组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n=\pm1$

$$\|x_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}-x_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,+1}\|\geqslant\varepsilon$$

且

$$x_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}=\frac{1}{2}(x_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,-1}+x_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,+1}).$$

特别地, 如果在定义 2 和定义 3 中 C 为 Banach 空间 X 的单位球 $B(X)$, 此时分别称 Banach 空间 X 具有有限树和无限树.

James 于 1972 年在文献[2] 中用下面的有限表示定理得到了超自反空间的重要的树特征定理.

定理 1(有限表示定理[1])　如果 Banach 空间 X 具有有限树性质, 则可找到一 Banach 空间 Y 使得 $Y\xrightarrow{f\cdot r}X$ 且 Y 具有无限树.

Krivine 考虑了有限表示同 ultrapowers 的关系, 后来 Stern 对此进行了发展并用 ultrapowers 证明了首先由 Lindenstrauss 证明的局部自反理论[2].

设 $\mathscr{U}$ 为自然数集 N 上的一个非平凡超滤子, X^N 为 X 的乘积空间, $\|\circ\|_X$ 表示 X 上的范数. 令

$$\mathscr{F}=\{\bar{x}\in X^N,\bar{x}=(x_n)_{n\in N}: \sup_n\|x_n\|_X<+\infty\},$$

则 $\mathscr{F}$ 为 X^N 的一个子空间. 对每个 $\bar{x}=(x_n)_{n\in N}\in\mathscr{F}$, 定义

$$|\bar{x}|=\lim_{\mathscr{U}}\|x_n\|_X,$$

(由 $\mathscr{U}$ 为 N 上的超滤子且 $\{\|x_n\|_X: n\in N\}$ 为 R 上的相对紧集知上述极限存在). 易知 $|\circ|$ 为 $\mathscr{F}$ 上的一个半范数.

令 $\mathscr{N}\doteq\{\bar{x}\in X^N,\bar{x}=(x_n)_{n\in N}: \lim_n\|x_n\|_X=0\}$.

记 $\tilde{X}=\mathscr{F}/\mathscr{N}$ 且记 $\|\circ\|_{\tilde{X}}$ 为半范数 $|\circ|$ 诱导的商范数. 则商空间 $(\tilde{X},\|\circ\|_{\tilde{X}})$ 为一个赋范空间. 按商范数的定义, 对每个 $\tilde{x}\in\tilde{X}$,

$$\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}}=\lim_{\mathscr{U}}\|x_n\|_X,$$

其中 $(x_n)_{n\in N}$ 为 $\tilde{x}$ 的任一代表元.

Krivine 和 Stern 等人得到了以下结果[2-3].

定理 2　$\tilde{X}$ 为 Banach 空间.

收稿日期: 2007-01-31
Email: qjcheng@tom.com

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

定理 3 $\tilde{X}$ 在 X 中有限表示.

定理 4 若 X 具有有限树,则 $\tilde{X}$ 具有无限树.

2 主要结果

设 C 为 Banach 空间 X 的一非空凸集,令
$\tilde{C}=\{\tilde{x}\in\tilde{X}$:存在 $\bar{x}\in C$ 使得 $\tilde{x}=\bar{x}+\mathcal{N}\}$,
得到下面的结果.

定理 5 设 C 为 Banach 空间的一非空凸集,$\tilde{C}$ 定义如上.则

(i) $\tilde{C}$ 在 C 中有限表示;

(ii) 如果 C 具有有限树则 $\tilde{C}$ 具有无限树.

证明 首先来证明(i).易见 $\tilde{C}$ 为 $\tilde{X}$ 中的非空凸集.对每个 $\varepsilon>0$ 及每个 $\tilde{C}$ 的 n 维单纯形 $\tilde{C}_n\subset\tilde{C}$,则存在仿射无关的元素 $\tilde{x}^0,\tilde{x}^1,\cdots,\tilde{x}^n\in\tilde{C}$,使得 $\tilde{C}_n=co(\tilde{x}^0,\tilde{x}^1,\cdots,\tilde{x}^n)$.令 $\tilde{X}^0=\mathrm{span}\{\tilde{x}^1-\tilde{x}^0,\tilde{x}^2-\tilde{x}^0,\cdots,\tilde{x}^n-\tilde{x}^0\}$.由于 $\tilde{X}^0\cong(R^n,\|\cdot\|_1)$,从而存在 $\beta,\gamma>0$ 使得

$$\beta\sum_{i=1}^n|\alpha_i|\leqslant\|\sum_{i=1}^n\alpha_i(\tilde{x}^i-\tilde{x}^0)\|_X\leqslant\gamma\sum_{i=1}^n|\alpha_i|,$$

$\forall\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in R$.

由于 $(R^n,\|\cdot\|_1)$ 的单位球面为紧的,对 $\delta=\dfrac{\beta\varepsilon}{1+2d(C)}$ 存在有限 δ 网 $\alpha^1,\alpha^2,\cdots,\alpha^m\in S(R^n)$.对每个 $j=0,1,2,\cdots,n$,设 $(x_k^j)_{k\in N}$ 为 $\tilde{x}^j$ 的一个代表元.其中 $x_k^j\in C$,$(j=0,1,2,\cdots,n.k=1,2,\cdots)$.对每个有限 δ 网中的元素 $\alpha^i=(\alpha_1^i,\cdots,\alpha_n^i)$,由

$$\|\sum_{j=1}^n\alpha_j^i(\tilde{x}^j-\tilde{x}^0)\|_X=\lim_{\mathscr{U}}\|\sum_{j=1}^n\alpha_j^i(x_k^j-x_k^0)\|_X$$

的定义知,存在 $k_0\in N$ 使得对所有的 $i=1,2,\cdots,m$,

$$|\,\|\sum_{j=1}^n\alpha_j^i(\tilde{x}^j-\tilde{x}^0)\|_X-\|\sum_{j=1}^n\alpha_j^i(x_{k_0}^j-x_{k_0}^0)\|_X\,|<\delta$$

由 $\tilde{C}_n$ 为单纯行知,对每个 $\tilde{x}\in\tilde{C}_n$,存在惟一的 $\alpha_j\geqslant0$ 满足 $\sum_{j=0}^n\alpha_j=1$ 使得

$$\tilde{x}=\sum_{j=0}^n\alpha_j\tilde{x}^j.$$

定义 $T:\tilde{C}^n\to C$,

$$T\tilde{x}=\sum_{j=0}^n\alpha_jx_{k_0}^j.$$

显然 T 为仿射,对每个 $\tilde{x},\tilde{y}\in\tilde{C}_n$,则存在惟一的 $\alpha_j,\beta_j\geqslant0$ 满足 $\sum_{j=0}^n\alpha_j=1$,$\sum_{j=0}^n\beta_j=1$,使得

$$\tilde{x}=\sum_{j=0}^n\alpha_j\tilde{x}^j,\ \tilde{y}=\sum_{j=0}^n\beta_j\tilde{x}^j.$$

令

$$\gamma_j=\frac{\alpha_j-\beta_j}{\sum_{j=1}^n|\alpha_j-\beta_j|},\ j=1,2,\cdots,n,$$

则 $(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)\in S(R^n)$.从而存在有限 δ 网中的某个元素 $\alpha^{m_0}=(\alpha_1^{m_0},\alpha_2^{m_0},\cdots,\alpha_n^{m_0})$ 使得

$$\sum_{j=1}^n|\alpha_j^{m_0}-\gamma_j|<\delta$$

则

$$\begin{aligned}&|\,\|T\tilde{x}-T\tilde{y}\|_X-\|\tilde{x}-\tilde{y}\|_X\,|=\\&\sum_{j=1}^n|\alpha_j-\beta_j|\cdot|\,\|\sum_{j=1}^n\gamma_j(x_{k_0}^j-x_{k_0}^0)\|_X-\\&\|\sum_{j=1}^n\gamma_j(\tilde{x}^j-\tilde{x}^0)\|_X\,|\leqslant\\&\sum_{j=1}^n|\alpha_j-\beta_j|(\,|\,\|\sum_{j=1}^n\gamma_j(x_{k_0}^j-x_{k_0}^0)\|_X-\\&\|\sum_{j=1}^n\alpha_j^{m_0}(x_{k_0}^j-x_{k_0}^0)\|_X\,|+|\,\|\sum_{j=1}^n\alpha_j^{m_0}(x_{k_0}^j-\\&x_{k_0}^0)\|_X-\|\sum_{j=1}^n\alpha_j^{m_0}(\tilde{x}^j-\tilde{x}^0)\|_X\,|+\\&|\,\|\sum_{j=1}^n\alpha_j^{m_0}(\tilde{x}^j-\tilde{x}^0)\|_X-\|\sum_{j=1}^n\gamma_j(\tilde{x}^j-\\&\tilde{x}^0)\|_X\,|)\leqslant\sum_{j=1}^n|\alpha_j-\beta_j|(\delta\cdot d(C)+\delta+\\&\delta\cdot d(C))\leqslant\frac{\delta(1+2d(C))}{\beta}\times\\&\|\sum_{j=1}^n|\alpha_j-\beta_j|(\tilde{x}^j-\tilde{x}^0)\|_X=\varepsilon\|\tilde{x}-\tilde{y}\|_X.\end{aligned}$$

这样得到 $\tilde{C}$ 在 C 中有限表示.

下面来证明(ii).不妨设 $0\in C$.如果 C 具有有限树,则存在 $\varepsilon>0$ 使得对每个 $n\in N$,可找到 C 中的 2^n 个点 $(x^{(n)}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n})_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}$ 构成一 (n,ε)-树.在下面利用这些点来构造 $(y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n})_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}$,使这族点形成 $\tilde{C}$ 的无限树.对每个 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n=\pm1$,$y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}$ 的代表元 $(y^{(i)}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n})_{i\in N}$ 定义为

如果 $i<n$,令

$$y^{(i)}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}=0\tag{1}$$

如果 $i\geqslant n$,令

$$y^{(i)}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}=\frac{1}{2^{i-n}}\sum_{\varepsilon_j=\pm1,\,n+1\leqslant j\leqslant i}x^{(i)}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,\varepsilon_{n+1},\cdots,\varepsilon_i}\tag{2}$$

显然 $(y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n})_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}\in\tilde{C}$.下面证明其构成一无限树.

对 $i\geqslant n$,由 $(x^{(n)}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n})_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}$ 构成一 (n,ε)-树知

$$\begin{aligned}&\|\frac{1}{2^{i-n}}\sum_{\varepsilon_j=\pm1,\,n+1\leqslant j\leqslant i}x^{(i)}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1},+1,\varepsilon_{n+1},\cdots,\varepsilon_i}-\\&\frac{1}{2^{i-n}}\sum_{\varepsilon_j=\pm1,\,n+1\leqslant j\leqslant i}x^{(i)}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1},-1,\varepsilon_{n+1},\cdots,\varepsilon_i}\|_X\geqslant\varepsilon,\end{aligned}$$

从而对所有的 $n\geqslant1$,$i\geqslant n$ 和 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n=\pm1$,

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\|y^{(i)}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1},+1}-y^{(i)}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1},-1}\|_X\geqslant\varepsilon,$$

进而

$$\|y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1},+1}-y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1},-1}\|_X\geqslant\varepsilon \tag{3}$$

再注意到对 $i\geqslant n+1$，

$$\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2^{i-(n+1)}}\sum_{\varepsilon_j=\pm1,\,n+2\leqslant j\leqslant i}x^{(i)}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,+1,\varepsilon_{n+2},\cdots,\varepsilon_i}\Big]+\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2^{i-(n+1)}}\sum_{\varepsilon_j=\pm1,\,n+2\leqslant j\leqslant i}x^{(i)}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,-1,\varepsilon_{n+2},\cdots,\varepsilon_i}\Big]=\frac{1}{2^{i-n}}\sum_{\varepsilon_j=\pm1,\,n+1\leqslant j\leqslant i}x^{(i)}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,\varepsilon_{n+1},\cdots,\varepsilon_i},$$

因此

$$\frac{1}{2}\big(y^{(i)}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,+1}+y^{(i)}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,-1}\big)=y^{(i)}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n},$$

这样

$$\frac{1}{2}\big(y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,+1}+y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,-1}\big)=y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n} \tag{4}$$

由式(3)、(4)知$(y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n})_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}$构成了$C$中的无限树.

参考文献：

[1] James R C. Some self-dual properties of normed linear spaces[J]. Ann Math Studies, 1972, 69(2): 159—175.

[2] Stern J. Ultrapowers and local properties of Banach spaces [J]. Trans Amer Math Soc, 1978, 240(3): 231—252.

[3] Krivine J L. Sous espaces de dimensional finie des espace de Banach reticules[J]. Ann of Math, 1976, 104(2): 1—29.

The Generalization of James Finite Representability Theorem

CHENG Qing-jin

(School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: Ultrapower and finite representation are two important tools to study super-reflexive Banach spaces, and James finite representability theorem is the bridge to build the finite tree characterization of super-reflexive spaces. This paper first introduces a notion of finite representation between two sets, which is a generalized setting to the notion between two spaces; then in terms of ultrapower and generalized finite representation, the paper generates James finite representability theorem to a general nonempty convex set.

Key words: ultrapower; Banach space

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net