文章编号:0438-0479(2003)04-0425-03

α-双对角占优矩阵

汪 祥,卢琳璋
(厦门大学数学系,福建 厦门 361005)

摘要: Li Bishan 和 Tsatsomeros 定义了双对角占优矩阵,并且给出了不可约双对角占优矩阵是奇异的及不是 H-阵的充分必要条件.本文利用矩阵的有向图的方法研究了 α-双对角占优矩阵的性质,并给出了 A 为奇异的及 A 不是 H-阵的充分必要条件,推广了其主要结果.

关键词: α- 对角占优;α- 双对角占优;回路
中图分类号: O 241.6 **文献标识码:** A

1 记号和定义

记 $\Lambda_i(A)=\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|, S_i(A)=\sum\limits_{j\neq i}|a_{ji}|$(在不引起误解的情况下分别简记为 Λ_i 和 S_i)

定义 1 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, $M(A)=(m_{ij})\in C^{n\times n}$,其中 $i\neq j$ 时 $m_{ij}=-|a_{ij}|$, $i=j$ 时 $m_{ij}=|a_{ij}|$,称 $M(A)$ 为 A 的比较矩阵;若 $M(A)$ 为非奇异的 M 阵,则称 A 为 H 阵.

定义 2 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若对任意的 $i\in N$,存在 $\alpha\in[0,1]$ 使得:

$$|a_{ii}|\geqslant \Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha} \tag{1}$$

则称 A 为 α- 对角占优矩阵,记为 $A\in D_0^{\alpha}$;若式(1)中的不等式均为严格的,则称 A 为严格 α- 对角占优矩阵,记为 $A\in D_1^{\alpha}$;若 A 满足式(1),A 不可约且式(1)中的不等式至少有一严格不等式成立,则称 A 为不可约 α- 对角占优矩阵,记为 $A\in D_2^{\alpha}$.

定义 3 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若对任意的 $i\neq j(i,j\in N)$ 皆有

$$|a_{ii}a_{jj}|\geqslant(\Lambda_i\Lambda_j)^{\alpha}(S_iS_j)^{1-\alpha} \tag{2}$$

其中 $\alpha\in[0,1]$,则称 A 为 α- 双对角占优矩阵,记为 $A\in DD_0^{\alpha}$;若式(2)中每一不等号都是严格的,则称 A 为严格 α- 双对角占优矩阵,记为 $A\in DD_1^{\alpha}$;若 $A\in DD_0^{\alpha}$,A 不可约且式(2)中的不等式至少有一严格不等式成立,则称 A 为不可约 α- 双对角占优矩阵,记为 $A\in DD_2^{\alpha}$.

定义 4 记实值函数的 $n(\geqslant 2)$ 组数 $f=(f_1,f_2\cdots,f_n)$ 的全体为 $\mathscr{F}_n$,其中 $f_i:C^{n\times n}\to R^+$ 且只与矩阵非对角元的模有关,若 $f\in\mathscr{F}_n$ 满足对 $|a_{ii}|>f_i(A), i\in N$ 的每个 $A\in C^{n\times n}$ 皆为非奇异的,则称 f 为 G 函数.(见文献[1]第 320 页)

定义 5 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 的有向图为 $\Gamma(A)$,若 $a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_ti_1}\neq 0, t\geqslant 2, i_1,i_2,\cdots,i_t$ 互不相同,则称 $\Gamma(A)$ 的顶点 $i_1,i_2,\cdots,i_t$ 构成一个回路,记作 v.

下面用 $i\in v$ 表示 i 是回路 v 上的一个顶点,并且用 $S(A)$ 表示 $\Gamma(A)$ 中全体回路的集合.

定义 6 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若对 $\forall i\in N, a_{ii}\neq 0$ 且 $\exists i_0\in N$ 满足 $a_{i_0k}\neq 0, a_{ki_0}\neq 0, \forall k\in N$,而 $a_{ij}=0, i\neq i_0$ 或 $j\neq i_0, i\neq j$,则称 A 的有向图 $\Gamma(A)$ 是以 i_0 为中心.

2 主要结论

易知,对 $\forall A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若 $A\in DD_1^{\alpha}$ 或 $A\in DD_2^{\alpha}$,则 $a_{ii}\neq 0$, $i\in N$.下面我们先比较一下严格 α- 对角占优矩阵与严格 α- 双对角占优矩阵之间的相似和不同之处.

1) 若 A 为严格 α- 对角占优,则 $\det A\neq 0$(见文献[2]定理 2);若 A 为严格 α- 双对角占优,也有 $\det A\neq 0$.

2) 若 A 为不可约 α- 对角占优.则 $\det A\neq 0$(见

收稿日期: 2002-12-11
基金项目: 国家自然科学基金(10271099)资助
作者简介: 汪祥(1980—),男,硕士研究生.

文献[3]定理 3);若 A 为不可约 α- 双对角占优,但不一定有 $\det A \neq 0$. 例如:

$$\text{取 } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

容易验证 A 为不可约 α- 双对角占优,但 $\det A = 0$.

3) 若 A 为严格 α- 对角占优或 A 为不可约 α- 对角占优,则 A 为非奇 H 阵(见文献[3]),但若 $A \in DD_2^\alpha$,由(2)中的例子可以看出 A 不一定为非奇 H 阵.

引理 1 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, $f_i(A) = \Lambda_i^\alpha S_i^{1-\alpha}$, $\alpha \in [0,1]$, $i \in N$, 则 $f(A) = (f_1(A), f_2(A), \cdots, f_n(A))$ 是 G 函数.

证 对任意 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, 若 $|a_{ii}| > f_i(A) = \Lambda_i^\alpha S_i^{1-\alpha}$, $\alpha \in [0,1]$, $i \in N$, 则由文献[3]的定理 2 知 A 为广义严格对角占优阵,从而 $\det A \neq 0$, 故由 G 函数定义知 $f(A) = (f_1(A), f_2(A), \cdots, f_n(A))$ 为一个 G 函数.

定理 1 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, A 不可约,若对 $\forall v \in S(A)$

$$\prod_{i\in v} |a_{ii}| \geqslant \prod_{i\in v} \Lambda_i^\alpha S_i^{1-\alpha}, \text{其中 } \alpha \in [0,1] \tag{3}$$

且式(3)至少对 $\Gamma(A)$ 中一条回路 v 严格成立,则 $\det A \neq 0$.

证 由引理 1 及文献[1](321 页)的推论 4 知 $\det A \neq 0$.

定理 2 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, 若 $A \in DD_0^\alpha$, 则有:

(1) $M(A)$ 为 M- 阵.

(2) A 是 H- 阵当且仅当 $M(A)$ 非奇.

(3) 若 $A \in DD_2^\alpha$ 且式(2)至少对 $\Gamma(A)$ 中某一条回路 v 严格成立,则 A 是 H 阵.

证 1) 令 $B_\varepsilon = M(A) + \varepsilon I$, $\forall \varepsilon > 0$, 则易知 $B_\varepsilon \in DD_1^\alpha$, 从而由文献[4]的推论 1 知 $\det B_\varepsilon \neq 0$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 故 $M(A)$ 是 M- 阵.

2) 由(1)知(2)显然成立.

3) 由(3)的条件知 $M(A)$ 满足定理 1 的条件,再由(2)知(3)成立.

引理 2 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, 若 $\Gamma(A)$ 是以 i_0 为中心,则 $\det A = \prod_{j\neq i_0} a_{jj} (a_{i_0 i_0} - \sum_{k\neq i_0} \frac{a_{ki_0} a_{i_0 k}}{a_{kk}})$.

证 由定义 6 可知 A 除了对角元和第 i_0 行、第 i_0 列元素不为零其它元素均为零,于是可对 A 进行初等变换,将 A 的第 i_0 行非对角元全部化为零,则易知 A 变成一个上三角矩阵且对角元为 $a_{11}, \cdots$,

$$a_{i_0-1, i_0-1}, a_{i_0 i_0} - \sum_{k\neq i_0} \frac{a_{ki_0} a_{i_0 k}}{a_{kk}}, a_{i_0+1, i_0+1}, \cdots, a_{nn}, i_0 \in N,$$

故 $\det A = \prod_{j\neq i_0} a_{jj} (a_{i_0 i_0} - \sum_{k\neq i_0} \frac{a_{ki_0} a_{i_0 k}}{a_{kk}})$.

定理 3 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, 若 $A \in DD_2^\alpha$, 则 $\det A = 0$ 当且仅当 $\Gamma(A)$ 是以 i_0 为中心且有:

$$|a_{i_0 i_0}| < \Lambda_{i_0}^\alpha S_{i_0}^{1-\alpha},$$
$$|a_{i_0 i_0} a_{jj}| = (\Lambda_{i_0} \Lambda_j)^\alpha (S_{i_0} S_j)^{1-\alpha},$$
$$\alpha \in [0,1], j \in N\backslash\{i_0\},$$
$$a_{i_0 i_0} - \sum_{k\neq i_0} \frac{a_{ki_0} a_{i_0 k}}{a_{kk}} = 0.$$

证 充分性:因为 $\Gamma(A)$ 是以 i_0 为中心且 $a_{i_0 i_0} - \sum_{k\neq i_0} \frac{a_{ki_0} a_{i_0 k}}{a_{kk}} = 0$, 则由引理 2 知 $\det A = 0$.

必要性:设 $A \in DD_2^\alpha$, 且 $\det A = 0$, 则存在两种情况:

1) 对所有的 $i \in N$, 都有 $|a_{ii}| \geqslant \Lambda_i^\alpha S_i^{1-\alpha}$, 此时由文献[2]的定理 2 的(2)知 $\det A \neq 0$, 这与题设矛盾.

$$2)\ |a_{i_0 i_0}| < \Lambda_{i_0}^\alpha S_{i_0}^{1-\alpha}, i_0 \in N, \text{且 } |a_{jj}| > \Lambda_j^\alpha S_j^{1-\alpha}, j \in N\backslash\{i_0\} \tag{4}$$

若存在 $v \in S(A)$, $i_0 \notin v$, 则存在 $v \in S(A)$ 有 $\prod_{i\in v} |a_{ii}| > \prod_{i\in v} \Lambda_i^\alpha S_i^{1-\alpha}$, 由文献[3]的推论 2 知 $\det A \neq 0$, 与题设矛盾. 所以 $\exists v \in S(A)$, 使得 $i_0 \in v$.

下面我们证明含 i_0 的回路都是形如 $v = (i_0, j, i_0)$ 的回路, $j \in N\backslash\{i_0\}$. 否则,设 $v = (i_0, i_1 \cdots, i_p, i_0)$, $p \geqslant 2$, 则:

$$\prod_{i\in v} |a_{ii}| = |a_{i_0 i_0} a_{i_1 i_1}| \prod_{i\in v\backslash\{i_0, i_1\}} |a_{ii}| > |a_{i_0 i_0} a_{i_1 i_1}| \prod_{i\in v\backslash\{i_0, i_1\}} \Lambda_i^\alpha S_i^{1-\alpha} = \prod_{i\in v} \Lambda_i^\alpha S_i^{1-\alpha},$$

从而对 $\forall v \in S(A)$, 都有 $\prod_{i\in v} |a_{ii}| > \prod_{i\in v} \Lambda_i^\alpha S_i^{1-\alpha}$, 于是由引理 1 知 $\det A \neq 0$, 与题设矛盾. 由于 A 是不可约的,所以 $\Gamma(A)$ 是强连通的,从而 $\Gamma(A)$ 的每个顶点 i 都在某一个回路 $v \in S(A)$ 上,因此可设:

$$S(A) = \{v_j : v_j = (i_0, j, i_0), j \in N\backslash\{i_0\}\} \tag{5}$$

特别地,在 $\Gamma(A)$ 中当 $i \neq i_0$ 或 $j \neq i_0$ 时, (i,j) 一定不是 $\Gamma(A)$ 中的边,否则 $v = (i_0, i, j, i_0) \in S(A)$, 这与(5)矛盾,故 $\Gamma(A)$ 是以 i_0 为中心.

又若 $\exists j \in N\backslash\{i_0\}$ 使得

$|a_{i_0i_0}a_{jj}| > (\Lambda_{i_0}\Lambda_j)^\alpha(S_{i_0}S_j)^{1-\alpha}$,

则在 $\Gamma(A)$ 中存在一条回路 $\bar{v}=(i_0,j,i_0)$ 使得 $\prod_{i\in\bar{v}}|a_{ii}| > \prod_{i\in\bar{v}}\Lambda_i^\alpha S_i^{1-\alpha}$,于是由定理 1 知 $\det A\neq 0$,这又与题设矛盾. 故对 $\forall j\in N\backslash\{i_0\}$ 有 $|a_{i_0i_0}a_{jj}| = (\Lambda_{i_0}\Lambda_j)^\alpha(S_{i_0}S_j)^{1-\alpha}$. 又由引理 2 知 $\det A=\prod_{j\neq i_0}a_{jj}(a_{i_0i_0}-\sum_{k\neq i_0}\frac{a_{ki_0}a_{i_0k}}{a_{kk}})$,因为 $a_{ii}\neq 0, i\in N$,从而可得 $a_{i_0i_0}-\sum_{k\neq i_0}\frac{a_{ki_0}a_{i_0k}}{a_{kk}}=0$.

推论 1　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若 $A\in DD_2^\alpha$,则 A 不是 H 阵当且仅当 $\Gamma(A)$ 是以 i_0 为中心且满足:

$$|a_{i_0i_0}| < \Lambda_{i_0}^\alpha S_{i_0}^{1-\alpha},$$

$$|a_{i_0i_0}a_{jj}| = (\Lambda_{i_0}\Lambda_j)^\alpha(S_{i_0}S_j)^{1-\alpha}, \alpha\in[0,1],$$

$$|a_{i_0i_0}| - \sum_{k\neq i_0}\left|\frac{a_{ki_0}a_{i_0k}}{a_{kk}}\right| = 0 \tag{6}$$

证　必要性:若 A 不是 H 阵,因为 $A\in DD_2^\alpha$,则易知 $M(A)\in DD_2^\alpha$,由定理 2(2) 知 $M(A)$ 奇异,再由定理 3 知必要性成立.

充分性:由题设条件及定理 3 知 $M(A)$ 是奇异的,从而由定理 2(2) 知 A 不是 H 阵.

致　谢:华南师大黎稳教授和厦门大学林鹭副教授对本文提出了宝贵的意见,作者致以衷心的感谢.

参考文献:

[1]　陈公宁. 矩阵理论与应用[M]. 北京:高等教育出版社,1990.

[2]　Li Bishan, Tsatsomeros M J. Doubly diagonally dominant matrices[J]. Linear Algebra Appl. ,1997,261:221－235.

[3]　Sun Yuxiang. An improvement on a theorem by ostrowki and its applications[J]. Northeastern, Math. J. , 1991,7(4):497－502.

[4]　孙玉祥. 广义严格对角占优矩阵与非奇异 M-矩阵的判定[J]. 厦门大学学报(自然科学版),2001,40(5):1 011－1 016.

α-Double Diagonally Dominant Matrices

WANG Xiang, LU Lin-zhang

(Dept. of Math. , Xiamen Univ. , Xiamen 361005, China)

Abstract: Li Bishan and Tsatsomeros gave the definition of doubly diagonally dominant matrix and presented some necessary and sufficient conditions for an irreducible doubly diagonally dominant matrix to be a sigular matrix or not to be an H-matrix. In this paper, we present some necessary and sufficient conditions in terms of the directed graph for an irreducible α-doubly diagonally dominant matrix to be a singular matrix or not to be an H-matrix, and generalize the related results of Li and Tsatsomeros′.

Key words: α-diagonally dominant; α-double diagonally dominant; circuit