第46卷第4期
2003年7月

数 学 学 报
ACTA MATHEMATICA SINICA

Vol.46, No.4
July, 2003

文章编号:0583-1431(2003)04-0811-04 文献标识码: A

正拼挤流形的 F- 调和映射

李锦堂

(厦门大学数学系 厦门 361005)
(E-mail: lijintang@fm365.com)

摘 要 设 M^n $(n\geq 3)$ 是 R^{n+1} 中紧致凸超曲面，本文证明了：若 $F''\leq 0$ 且 M 的 n 个主曲率 λ_i 满足 $0<\lambda_i<\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\lambda_j$, $\forall i$, 则 M^n 和任何紧致黎曼流形之间的稳定 F- 调和映射必为常值映射.

关键词 F- 调和映射；不稳定性；正拼挤流形
MR(2000) 主题分类 58E20
中图分类 O186

F-Harmonic Maps for Positively Curved Manifolds

Jin Tang LI

(*Department of Mathematics, Xiamen University, Xiamen* 361005, *P. R. China*)
(*E-mait: lijintang@fm365.com*)

Abstract Let M^n $(n\geq 3)$ be a compact convex hypersurface in R^{n+1}. In this paper, we prove that if $F''\leq 0$ and the principal curvature λ_i of M satisfies: $0<\lambda_i<\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\lambda_j$, $\forall i$, then there is no nonconstant stable F-harmonic map between M and a compact Riemannian manifold.

Keywords F-harmonic maps; Unstability; Positively curved manifolds
MR(2000) Subject Classification 58E20
Chinese Library Classification O186

1 引言及定理

令 $F:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是 C^2 函数且在 $(0,+\infty)$ 上 $F'>0$, 对于黎曼流形 (M,g), (N,h) 之间光滑映射 $\phi:M\to N$, Ara [1] 引入了 F- 能量的定义如下： $E_F(\phi)=\int_M F(\frac{|d\phi|^2}{2})$. F- 调和映射 ϕ 就是 F- 能量泛函的临界点；当 $F(t)=t$, $\frac{(2t)^{\frac{p}{2}}}{p}$, e^t 时， ϕ 分别就是通常的调和映射、P- 调和映射、指数调和映射. ϕ 的 F- 张力场 $\tau_F(\phi)$ 定义 $\tau_F(\phi)=-d^*\big(F'(\frac{|d\phi|^2}{2})d\phi\big)$.

命题 [1] $\phi:M\to N$ 是 F- 调和映射当且仅当 $\tau_F(\phi)=0$.

F- 调和映射 $\phi:M\to N$ 的第二变分公式为 [1]

$$I(V,V)=\int_M F''\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\langle\overline{\nabla}V,d\phi\rangle^2+\int_M F'\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\Big\{|\overline{\nabla}V|^2-\sum_{i=1}^n\langle R^N(V,\phi_*e_i)\phi_*e_i,V\rangle\Big\},$$

收稿日期： 2000-09-26; 修改日期： 2002-06-25; 接受日期： 2002-10-09
基金项目：福建省自然科学基金资助项目 (F0110011); 厦门大学科研基金资助项目 (20012002)

其中 $V \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$, ∇ 为 $\phi^{-1}TN$ 上联络.

若对任何 $V \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$, 都有 $I(V,V) \geq 0$, 则称 F- 调和映射 ϕ 是稳定的; 否则称 ϕ 为不稳定的.

对于目标流形为球面的情况, Ara 证得如下定理:

定理 A[1] 设 (1)$F'' \leq 0$ 且 $n \geq 3$, 或 (2) $F'' < 0$ 且 $n = 2$, 则从任何紧致黎曼流形到球面 S^n 的稳定 F- 调和映射必为常值映射.

本文主要讨论出发流形为球面的情况, 得到下面结果:

定理 设 M^n $(n \geq 3)$ 是 R^{n+1} 中紧致凸超曲面, 若 $F'' \leq 0$ 且 M 的 n 个主曲率 λ_i 满足 $0 < \lambda_i < \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j$, $\forall i$, 则 M^n 和任何紧致黎曼流形之间的稳定 F- 调和映射必为常值映射.

推论 设 (1)$F'' \leq 0$ 且 $n \geq 3$, 或 (2) $F'' < 0$ 且 $n = 2$, 则任何紧致黎曼流形和球面 S^n 的稳定 F- 调和映射必为常值映射.

2 预备知识

设 $x: M^n \to R^{n+1}(1)$ 是等距浸入, $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ 为 R^{n+1} 的局部标架场, 使得 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 为 M 的局部标架场, 且 $\nabla_{e_i}e_j|_p = 0$, h_{ij} 为 M 在 $R^{n+1}(1)$ 中第二基本形式分量.

令 $V = v^i e_i = \langle \Lambda, e_i\rangle e_i$, 其中 Λ 为 R^{n+1} 中常单位向量, 记 $\langle \Lambda, e_{n+1}\rangle = v^{n+1}$, 则有

$$\nabla_{e_i}V = v^{n+1}h_{ij}e_j, \tag{2.1}$$

$$\nabla_{e_i}(\nabla_{e_i}V) = -v^k h_{ik}h_{ij}e_j + v^{n+1}(\nabla_{e_i}h_{ij})e_j, \tag{2.2}$$

$$\overline{\nabla}_{e_i}(d\phi(\nabla_{e_i}V)) = -v^k h_{ik}h_{ij}(d\phi e_j) + v^{n+1}(\overline{\nabla}_{e_i}h_{ij})(d\phi e_j) + v^{n+1}h_{ij}\overline{\nabla}_{\phi_* e_i}\phi_* e_j. \tag{2.3}$$

3 定理的证明

命题 1 设 M^n $(n \geq 3)$ 是 R^{n+1} 中紧致凸超曲面, 若 $F'' \leq 0$ 且 M 的 n 个主曲率 λ_i 满足 $0 < \lambda_i < \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j$, $\forall i$, 则从 M^n 到任何黎曼流形 N 的稳定 F- 调和映射必为常值映射.

证明 取 $\{\Lambda_A\}$ 为 R^{n+1} 的常单位幺正基, 则 $\sum_A v_A^i v_A^j = \delta_{ij}$. F- 调和映射 $\phi: M \to N$ 的第二变分公式为

$$\begin{aligned} I(\phi_* V_A, \phi_* V_A) = &\int_M F''\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\langle \overline{\nabla}\phi_* V_A, d\phi\rangle^2 \\ &+ \int_M F'\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\Big\{|\overline{\nabla}\phi_* V_A|^2 - \sum_{i=1}^{n}\langle R^N(\phi_* V_A, \phi_* e_i)\phi_* e_i, \phi_* V_A\rangle\Big\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

由 Weitzenböck 公式得

$$-R^N(\phi_* V_A, d\phi e_i)d\phi e_i + \phi_* \mathrm{Ric}^M V_A = \Delta d\phi(V_A) + \overline{\nabla}^2 d\phi(V_A). \tag{3.2}$$

由 F- 调和映射的性质, 有

$$\sum_A \int_M F'\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\langle \Delta d\phi(V_A), d\phi V_A\rangle = 0. \tag{3.3}$$

由 (3.1), (3.2), (3.3) 式得

$$\sum_A I(\phi_* V_A, \phi_* V_A) = \sum_A \int_M F''\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\langle \overline{\nabla}\phi_* V_A, d\phi\rangle^2 + \sum_A \int_M F'\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)$$
$$\cdot \big\{|\overline{\nabla}\phi_* V_A|^2 + \langle \overline{\nabla}^2 d\phi(V_A), \phi_* V_A\rangle - \langle \phi_* \mathrm{Ric}^M V_A, \phi_* V_A\rangle\big\}. \tag{3.4}$$

先证明以下引理.

引理 1 题设如上, 则

$$\sum_A \int_M F'\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\big\{|\overline{\nabla}\phi_* V_A|^2 + \langle \overline{\nabla}^2 d\phi(V_A), \phi_* V_A\rangle\big\}$$
$$= \sum_A \int_M F'\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\langle -2\overline{\nabla}_{e_i}(d\phi(\nabla_{e_i} V_A)) + d\phi(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} V_A), d\phi V_A\rangle$$
$$- \sum_A \int_M \Big\langle \overline{\nabla}_{e_i}(d\phi V_A), \overline{\nabla}_{e_i}\Big(F'\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\Big)d\phi V_A\Big\rangle.$$

证明 $\forall p \in M$, 可设 $\nabla_{e_i} e_j|_p = 0$.

$$\overline{\nabla}^2 d\phi(V_A) = \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} d\phi(V_A) = \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}(d\phi V_A) - 2\overline{\nabla}_{e_i}(d\phi(\overline{\nabla}_{e_i} V_A)) + d\phi(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} V_A). \tag{3.5}$$

$$\int_M F'\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\langle \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}(d\phi V_A), d\phi V_A\rangle = -\int_M \Big\langle \overline{\nabla}_{e_i}(d\phi V_A), \overline{\nabla}_{e_i}\Big(F'\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)d\phi V_A\Big)\Big\rangle$$
$$= -\int_M \Big\langle \overline{\nabla}_{e_i}(d\phi V_A), \overline{\nabla}_{e_i}\Big(F'\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\Big)d\phi V_A\Big\rangle - \int_M F'\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)|\overline{\nabla}(d\phi V_A)|^2. \tag{3.6}$$

由 (3.5), (3.6) 式得引理 1.

由 (3.4) 式和引理 1 得

$$\sum_A I(\phi_* V_A, \phi_* V_A)$$
$$= \sum_A \int_M \Big\{F''\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\langle \overline{\nabla}\phi_* V_A, d\phi\rangle^2 - \Big\langle \overline{\nabla}_{e_i}(d\phi V_A), \overline{\nabla}_{e_i}\Big(F'\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\Big)d\phi V_A\Big\rangle\Big\}$$
$$+ \sum_A \int_M F'\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\{\langle -2\overline{\nabla}_{e_i}(d\phi(\nabla_{e_i} V_A)) + d\phi(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} V_A) - \phi_* \mathrm{Ric}^M V_A, \phi_* V_A\rangle\}. \tag{3.7}$$

选取局部标架场, 使得 $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, 则有

引理 2 题设如上, 则 $\sum_A \{\langle -2\overline{\nabla}_{e_i}(d\phi(\nabla_{e_i} V_A)) + d\phi(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} V_A) - \phi_* \mathrm{Ric}^M V_A, \phi_* V_A\rangle\} = (2\lambda_i - \sum_k \lambda_k)\lambda_i |d\phi|^2$.

证明 由 Gauss 方程得

$$\mathrm{Ric}^M(V) = v^i(h_{kk}h_{ij} - h_{il}h_{jl})e_j, \tag{3.8}$$

由 (2.1), (2.2), (2.3), (3.8) 式得

$$\sum_A \{\langle -2\overline{\nabla}_{e_i}(d\phi(\nabla_{e_i} V_A)) + d\phi(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} V_A) - \phi_* \mathrm{Ric}^M V_A, \phi_* V_A\rangle\}$$
$$= \sum_A \{\langle 2v_A^k h_{ik}h_{ij}\phi_* e_j - v_A^i h_{kk}h_{ij}\phi_* e_j - v_A^{n+1}(\nabla_{e_i} h_{ij})\phi_* e_j - 2v_A^{n+1} h_{ij}\overline{\nabla}_{\phi_* e_i}\phi_* e_j, v_A^l \phi_* e_l\rangle\}$$
$$= \langle 2h_{il}h_{ij}\phi_* e_j - h_{kk}h_{lj}\phi_* e_j, \phi_* e_l\rangle = \Big(2\lambda_i - \sum_k \lambda_k\Big)\lambda_i |d\phi|^2.$$

引理 3 若 $F''(\frac{|d\phi|^2}{2}) \le 0$, 则

$$\sum_A F''\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\langle\nabla\phi_* V_A, d\phi\rangle^2 - \sum_A \Big\langle \overline{\nabla}_{e_i}(d\phi V_A), \overline{\nabla}_{e_i}\Big(F'\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\Big)\phi_* V_A\Big\rangle \le 0.$$

证明

$$\begin{aligned}&\sum_A \Big\langle \overline{\nabla}_{e_i}(d\phi V_A), \overline{\nabla}_{e_i}\Big(F'\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\Big)\phi_* V_A\Big\rangle \\ &\quad = \sum_A F''\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\overline{\nabla}_{e_i}\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\langle v_A^{n+1}h_{ik}\phi_* e_k + v_A^k \overline{\nabla}_{\phi_* e_i}\phi_* e_k, v_A^j \phi_* e_j\rangle \\ &\quad = F''\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\langle\overline{\nabla}_{e_i} d\phi, d\phi\rangle^2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}&\sum_A F''\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\langle\nabla\phi_* V_A, d\phi\rangle^2 = \sum_A F''\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\langle v_A^{n+1}h_{ik}\phi_* e_k + v_A^k\overline{\nabla}_{\phi_* e_i}\phi_* e_k, \phi_* e_i\rangle^2 \\ &\quad = F''\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\{h_{ik}h_{jk}\langle\phi_* e_k, \phi_* e_i\rangle\langle\phi_* e_l, \phi_* e_j\rangle + 2\langle\overline{\nabla}_{\phi_* e_i}\phi_* e_k, \phi_* e_i\rangle\langle\overline{\nabla}_{\phi_* e_j}\phi_* e_k, \phi_* e_j\rangle\} \\ &\quad \le F''\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\langle\overline{\nabla}_{e_i} d\phi, d\phi\rangle^2, \end{aligned} \tag{3.10}$$

由 (3.9), (3.10) 式得引理 3.

由 (3.7) 式, 引理 2 和引理 3 得

$$\sum_A I(\phi_* V_A, \phi_* V_A) \le \int_M F'\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)|d\phi|^2\lambda_1\Big\{2\lambda_i - \sum_k \lambda_k\Big\}. \tag{3.11}$$

由 (3.12) 式和题设得命题 1.

命题 2 设 M^n $(n \ge 3)$ 是 R^{n+1} 中紧致凸超曲面, 若 $F'' \le 0$ 且 M 的 n 个主曲率 λ_i 满足 $0 < \lambda_i < \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \lambda_j$, $\forall i$, 则从任何紧致黎曼流形 N 到 M 的稳定 F- 调和映射必为常值映射.

证明 与文 [2] 定理 5 的计算类似, 有

$$\sum_A I(V_A, V_A) = \int_N F''\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\lambda_i^2 a_{\alpha i}^4 + F'\Big(\frac{|d\phi|^2}{2}\Big)\Big(2\lambda_i - \sum_{j=1}^n \lambda_j\Big)\lambda_i a_{\alpha i}^2,$$

其中 $\sum_{\alpha,i} a_{\alpha i}^2 = |d\phi|^2$.

由题设得命题 2.

由命题 1, 命题 2 即得定理.

致谢 作者衷心感谢导师白正国教授和沈一兵教授的悉心指导.

参 考 文 献

[1] Ara M., Geometry of F-harmonic maps, *Kodai. Math. J.*, 1999, **22**: 243–263.
[2] Peng J. G., Some relations between minimal submanifolds and harmonic maps, *Chin. Ann. Math.*, 1984, **5A**: 85–89 (in Chinese).
[3] Pan Y. L., Some nonexistence theorems on stable harmonic mappings, *Chin. Ann. Math.*, 1982, **3**: 515–518.