第 46 卷 第 1 期
2007 年 1 月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol. 46 No. 1
Jan. 2007

奇摄动问题的一个高精度方法

蔡 新

(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 考虑带大 Reynolds 数问题的对流-扩散方程. 近年来 Shishkin 网格法适合这类总是的求解, 收敛阶为 $O(N^{-1}\ln N)$. 提出高精度方法, 首先解析解被分解为光滑部分和奇性部分, 按 Shishkin 过渡点进行不等距网格剖分. 光滑部分使用了 Runge-Kutta 方法; 对于奇性部分, 除了采用指数拟合方法外, 还结合零逼近技巧, 这样构造的混合方法是高精度的. 最后本文给出数值例子以说明理论结果的正确性.

关键词: 奇摄动; 对流扩散; 数值方法

中图分类号: O 241.81　　文献标识码: A　　文章编号: 0438-0479(2007)01-0018-03

考虑带大 Reynolds 数问题的对流-扩散方程, 这是多尺度问题. Kellogg[1] 提出 Il′in 方法并证明其收敛阶为 $O(N^{-1})$, Il′in 法是一个等距数值方法. 人们更注重于不等距数值方法, 其中最著名的是 Shishkin 网格法. Miller 等人[2] 证明 Shishkin 网格法的收敛阶为 $O(N^{-1}\ln^2 N)$. Farrell 等人[3] 进一步证明其收敛阶为 $O(N^{-1}\ln N)$. 为了提高收敛阶, 人们采用 Bakhvalov 技巧[4] 得到收敛阶为 $O(N^{-1})$ 的 Bakhvalov-Shishkin 格式[5]. 本文采用混合方法得到高精度的结果.

文中的 $C, C_1, \cdots$ 是指与 N 和 ε 无关的正常数.

1 对流-扩散方程及其解析解的分解

在单位区间 $\Omega = [0, 1]$ 中考虑对流-扩散方程:

$$(P_\varepsilon)\begin{cases}\varepsilon u_\varepsilon''(x) + a(x)u_\varepsilon'(x) + b(x)u_\varepsilon(x) = \\ \quad f(x),\ x \in \Omega \\ u_\varepsilon(0) = u_0,\ u_\varepsilon(1) = u_1\end{cases} \tag{1}$$

其中 $a(x), b(x), f(x) \in C^2(\Omega)$, $a(x) \geqslant \alpha > 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$ 是小参数, $R = \varepsilon^{-1} \gg 1$ 是大 Reynolds 数.

上述问题在 $x = 0$ 失去边界条件, 导致边界层现象. 下面的引理在文献[2] 第 8 章中已被证明.

引理 1　设 u_ε 是问题(P_ε)的解. 则对于 $0 \leqslant k \leqslant 3$, 有:

$$|u_\varepsilon^{(k)}(x)| \leqslant C(1 + \varepsilon^{-k}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}),\ x \in \Omega \tag{2}$$

下面将解析解分解为光滑部分和奇性部分.

设函数 $v(x)$ 是退化问题(P_0)的解:

$$(P_0)\begin{cases}a(x)v'(x) + b(x)v(x) = f(x) \\ v(1) = u_\varepsilon(1)\end{cases} \tag{3}$$

函数 $v_1(x)$ 满足:

$$\begin{cases}a(x)v_1'(x) + b(x)v_1(x) = -v_0''(x) \\ v_1(1) = 0\end{cases} \tag{4}$$

函数 $v_2(x)$ 满足:

$$\begin{cases}L_\varepsilon v_2(x) = -v_1''(x) \\ v_2(0) = 0,\ v_2(1) = 0\end{cases} \tag{5}$$

光滑部分 $z_\varepsilon(x) = v(x) + \varepsilon v_1(x) + \varepsilon^2 v_2(x)$ 定义为:

$$\begin{cases}L_\varepsilon z_\varepsilon(x) = f(x) \\ z_\varepsilon(0) = v(0) + \varepsilon v_1(0),\ z_\varepsilon(1) = u_\varepsilon(1)\end{cases} \tag{6}$$

显然

$$z_\varepsilon(x) = v(x) + O(\varepsilon) \tag{7}$$

奇性部分 $w_\varepsilon(x)$ 定义为:

$$\begin{cases}L_\varepsilon w_\varepsilon(x) = 0 \\ w_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(0) - z_\varepsilon(0),\ w_\varepsilon(1) = 0\end{cases} \tag{8}$$

下面的估计式在文献[2] 第 8 章中已被证明:

$$|w_\varepsilon^{(k)}(x)| \leqslant C\varepsilon^{-k}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}},\ \forall x \in \Omega,\ 0 \leqslant k \leqslant 4 \tag{9}$$

易证 $z_\varepsilon(x) + w_\varepsilon(x)$ 满足问题(P_ε), 故有下列引理.

引理 2　设 u_ε 是问题(P_ε)的解, 则:

$$u_\varepsilon(x) = v(x) + w_\varepsilon(x) + O(\varepsilon) \tag{10}$$

其中 $v(x)$ 是问题(P_0)的解, $w_\varepsilon(x)$ 是问题(8)的解.

由于小参数 ε 往往很小, 在下面的讨论中假设:

$$\varepsilon \ll N^{-1} \tag{11}$$

2 混合算法

取过渡点 $\tau = \frac{4\varepsilon\ln N}{\alpha}$, 考虑不等距网格划分:

$$\Omega^N = \{x_i \mid x_i = \frac{2i\tau}{N}, i \leqslant \frac{N}{2};$$

收稿日期: 2006-01-23

基金项目: 福建省自然科学基金(2006J0040), 集美大学博士科研经费(ZQ2006034)资助

Email: cx85@263.net

$$x_i = x_{i-1} + \frac{2(1-\tau)}{N}, \frac{N}{2} < i\} \tag{12}$$

在边界层[0, τ] 内有相同的步长

$$h = \frac{8\varepsilon \ln N}{\alpha N} \leqslant C\frac{\varepsilon \ln N}{N} \tag{13}$$

在子区间[τ, 1] 内也有相同的步长:

$$H \leqslant C\frac{1}{N} \tag{14}$$

令 $h_i = x_i - x_{i-1}, 1 \leqslant i \leqslant N$.

对于退化问题(P_0), 引入了传统的 Runge-Kutta 方法. 设 $g(x, v) = \dfrac{f(x) - b(x)v(x)}{a(x)}$, 相应的网格函数 $V(x_i)$ 满足:

$$(P_v^N)\begin{cases} V(x_i) = V(x_{i+1}) + \\ \quad \dfrac{h_{i+1}}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4), 0 \leqslant i < N \\ m_1 = g(x_{i+1}, V(x_{i+1})) \\ m_2 = g(x_i + \dfrac{1}{2}h_{i+1}, V(x_{i+1}) - \dfrac{1}{2}h_{i+1}m_1) \\ m_3 = g(x_i + \dfrac{1}{2}h_{i+1}, V(x_{i+1}) - \dfrac{1}{2}h_{i+1}m_2), \\ m_4 = g(x_i, V(x_{i+1}) - h_{i+1}m_3) \\ V(x_N) = u_\varepsilon(1). \end{cases} \tag{15}$$

由文献[2] 可得:

引理 3　退化问题的解对于 $x_i \in \Omega^N$ 满足:

$$|V(x_i) - v(x_i)| \leqslant CN^{-4} \tag{16}$$

其中 $V(x_i)$ 是问题(15)的解, $v(x_i)$ 是问题(P_0)的解.

对于奇性部分 $w_\varepsilon(x)$, 注意到估计式(9), 有:

$$|w_\varepsilon(x)| \leqslant CN^{-4}, x \in [\tau, 1] \tag{17}$$

因此在远离边界层区间[τ, 1], 奇性部分 $w_\varepsilon(x)$ 非常小, 用零来逼近.

$$W_\varepsilon(x_i) = 0, x_i \in \Omega^N - \Omega^{\frac{N}{2}} \tag{18}$$

其中 $\Omega^{\frac{N}{2}} = \{x_0, x_1, \cdots, x_{\frac{N}{2}}\}$.

现讨论边界层[0, τ], 相应的网格函数满足:

$$(P_w^N)\begin{cases} L_\varepsilon^N W_\varepsilon(x_i) = \varepsilon\sigma_i(x_i)\hat{\delta}W_\varepsilon(x_i) + \\ \quad a(x_i)D^+W_\varepsilon(x_i) + b(x_i)W_\varepsilon(x_i) = \\ \quad 0, x_i \in \Omega^{\frac{N}{2}} \\ W_\varepsilon(x_0) = u_\varepsilon(0) - V(0), W_\varepsilon(x_{\frac{N}{2}}) = N^{-4} \end{cases} \tag{19}$$

其中 $D^+W_\varepsilon(x_i) = \dfrac{W_\varepsilon(x_{i+1}) - W_\varepsilon(x_i)}{h_{i+1}}$,

$$D^-W_\varepsilon(x_i) = \frac{W_\varepsilon(x_i) - W_\varepsilon(x_{i-1})}{h_i},$$

$$\hat{\delta}W_\varepsilon(x_i) = \frac{D^+W_\varepsilon(x_i) - D^-W_\varepsilon(x_i)}{\hbar_i},$$

$$\Omega^{\frac{N}{2}} = \{x_1, x_2, \cdots, x_{\frac{N}{2}-1}\}.$$

$\sigma_i(x_i) = \dfrac{a(x_i)h}{\varepsilon}\coth(\dfrac{a(x_i)h}{\varepsilon})$ 是指数拟合因子.

类似于文献[1, 2, 7] 的讨论, 容易证明下列离散最小值原理和一致稳定性结果.

引理 4　设网格函数 $\Psi(x_i)$ 满足:

$$\begin{cases} L_\varepsilon^N\Psi(x_i) \leqslant 0, x_i \in \Omega^{\frac{N}{2}} \\ \Psi(x_0) \geqslant 0, \Psi(x_{\frac{N}{2}}) \geqslant 0 \end{cases} \tag{20}$$

则 $\Psi(x_i) \geqslant 0, x_i \in \Omega^{\frac{N}{2}}$.

引理 5　问题(P_w^N)对于 $x_i \in \Omega^{\frac{N}{2}}$ 有如下估计:

$$|W_\varepsilon(x_i)| \leqslant C\{\max_{1 \leqslant i \leqslant \frac{N}{2}} |L_\varepsilon^N W_\varepsilon(x_i)| + |W_\varepsilon(x_0)| + |W_\varepsilon(x_{\frac{N}{2}})|\} \tag{21}$$

下列讨论中常用到如下估计式[1, 3, 6]:

$$c_1 \cdot t \leqslant \sinh t \leqslant c_2 \cdot t, t \in (0, m) \tag{22}$$

$$c_1 \cdot \exp t \leqslant \sinh t \leqslant c_2 \cdot \exp t, t \in (m, +\infty) \tag{23}$$

$$|t \cdot \coth t - 1| \leqslant c \cdot t, t \in (0, +\infty) \tag{24}$$

$$\left|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right| \leqslant c \cdot \frac{h}{\varepsilon}, t \in (0, +\infty) \tag{25}$$

$$\sinh t = t + s, \quad |s| \leqslant \frac{c \cdot |t|^3}{1 + |t|^2}, t \in (0, m) \tag{26}$$

$$\varepsilon \cdot \left|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right| \leqslant c \cdot \frac{h^2}{h + \varepsilon}, h \leqslant \varepsilon \tag{27}$$

$$\left|\frac{1}{\varepsilon^i}e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right| \leqslant C, i \geqslant 0 \tag{28}$$

引理 6　奇性部分的误差对于 $x_i \in \Omega^{\frac{N}{2}}$ 满足:

$$|W_\varepsilon(x_i) - w_\varepsilon(x_i)| \leqslant CN^{-4} + C\varepsilon + C\frac{\varepsilon \ln N}{N} \tag{29}$$

其中 $w_\varepsilon(x_i)$, $W(x_i)$ 分别是问题(8) 和(19) 的解.

证明　当 $x_i \in \Omega^{\frac{N}{2}}$ 时, 因为:

$$L_\varepsilon^N(W_\varepsilon(x_i) - w_\varepsilon(x_i)) = \varepsilon(w''_\varepsilon(x_i) - \sigma_i(x_i)\hat{\delta}w_\varepsilon(x_i)) + a(x_i)(w'_\varepsilon(x_i) - D^+w_\varepsilon(x_i)) \tag{30}$$

由文献[1, 6, 7] 的结论, 结合不等式(13), 可得:

$$|L_\varepsilon^N(W_\varepsilon(x_i) - w_\varepsilon(x_i))| \leqslant Ch \leqslant C\frac{\varepsilon \ln N}{N} \tag{31}$$

注意到:

$$|(w_\varepsilon(x_0) - W_\varepsilon(x_0))| \leqslant CN^{-4} + C\varepsilon,$$

$$|(w_\varepsilon(x_{\frac{N}{2}}) - W_\varepsilon(x_{\frac{N}{2}}))| \leqslant CN^{-4},$$

由引理 5 得对于 $x_i \in \Omega^{\frac{N}{2}}$:

$$|W_\varepsilon(x_i) - w(x_i)| \leqslant CN^{-4} + C\varepsilon + C\frac{\varepsilon \ln N}{N} \tag{32}$$

引理得证.

表 1 高精度算法和 Shishkin 网格法得到的最大逐点误差估计 E^N

Tab.1 Maximum pointwise errors of our high accurate method and Shishkin′s method

N	16	32	64	128
Shishkin 网格法	0.114633	0.065007	0.035910	0.019682
混合算法	2.20E-005	1.45E-006	9.44E-008	1.72E-008

令 $U_\varepsilon(x_i) = V(x_i) + W_\varepsilon(x_i)$, $x_i \in \Omega$, 是混合方法的数值解, 考虑到引理 2, 引理 3 和引理 6 可得定理.

定理 设 $u_\varepsilon(x_i)$ 是问题(P_ε) 的解, $U_\varepsilon(x_i)$ 是问题(P_v^N) 和问题(P_w^N) 的解, 则

$$|U_\varepsilon(x_i) - u(x_i)| \leqslant CN^{-4} + C\varepsilon + C\frac{\varepsilon \ln N}{N} \quad (33)$$

对于所有 $x_i \in \Omega^N$ 皆成立.

3 数值例子

在单位区间 $\Omega = [0,1]$ 中考虑对流-扩散方程:

$$\begin{cases} L_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon u''_\varepsilon + 2u'_\varepsilon + u_\varepsilon = \dfrac{e^{-\frac{2x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{2}{\varepsilon}}} \\ u_\varepsilon(0) = 1,\ u_\varepsilon(1) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

精确解是: $u_\varepsilon = \dfrac{e^{-\frac{2x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}$.

最大逐点误差定义如下: $E_\varepsilon^N = \max\limits_{\Omega^N} |u_\varepsilon(x_i) - U_\varepsilon(x_i)|$, $E^N = \max\limits_{\varepsilon \in [2^{-6}, 2^{-32}]} E_\varepsilon^N$.

分别用本文的混合算法和 Shishkin 网格法解上述问题, 表 1 列出计算结果, 从表 1 可见本文的方法是高精度方法, 明显优于 Shishkin 网格法.

参考文献:

[1] Kellogg K B, Tsan A. Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points[J]. Math Comp, 1978(12): 1025-1039.

[2] Miller J J H, Riordan E O′, Shishkin G I. Fitted numerical methods for singular perturbation problems[M]. Singapore: World Scientific, 1996.

[3] Farrell P, Hegarty A F, Miller J J H, et al. Robust computational techniques for boundary layers[M]. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2000.

[4] Bakhvalov N S. On the optimization of methods for boundary-value problems with boundary layers[J]. Math Comp Phys(in Russian), 1969(4): 841-859.

[5] Linβ T. Analytical and Numerical Methods For Convection-Dominated and Singularly Perturbed Problems[C]. London: Science Publishers, 1998: 198-204.

[6] Cai X, Liu F. Uniform convergence difference schemes for singularly perturbed mixed boundary problems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004(166): 31-54.

[7] Cai X, Lin P. Numerical solution to conservative form and singular perturbed ordinary differential equation with mixed boundary condition[J]. Journal of HuaQiao University(in Chinese), 1990(4): 344-352.

A High Accurate Method for Singular Perturbation Problem

CAI Xin

(School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: In this paper convection diffusion problem with big Reynolds number is considered. Shishkin′s method has become popular for this kind of problem in recent years. It is uniformly convergent with respect to big Reynolds number in order $O(N^{-1}\ln N)$. In this paper, high accurate numerical method is presented by mixed method. Firstly, the analytic solution is decomposed into the smooth component and the singular component. Secondly, the non-equidistant mesh partition according to Shishkin′s transition point is considered. Thirdly, Runge-Kutta method is applied for the smooth component. For the singular component, the exponentially fitted difference scheme with zero approximate techinique is used. The new method is shown that it is a high accurate method. Finally, numerical result is given, which is in agreement with the theoretical result.

Key words: singular perturbation; convection diffusion problem; numerical solution