3-幂零矩阵的相似等价类的计数

林荣珍　　江　飞
(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘　要　主要对定义在一般数域上的 3-幂零矩阵的相似等价类的个数问题进行探讨. 从中得出 n 阶 3-幂零矩阵秩的范围、n 阶 3-幂零矩阵的相似等价类的个数的计算公式, 以及秩为 r 的所有 n 阶 3-幂零矩阵的相似等价类的个数的计算公式.

关键词　k-幂零矩阵; 3-幂零矩阵; Jordan 标准型; 秩; 整数分拆
中图分类号　O 151　　　文献标识码　A

0　引　　言

矩阵的标准形式的理论是矩阵论中重要的一个方面, 尤其关于化矩阵为 Jordan 标准型的理论及方法, 已经列为线性微分方程组理论的必不可少的基础知识[1]. 本文将在文献[1]的基础上, 对定义在一般数域上的 3-幂零矩阵的相似等价类的个数问题进行探讨.

为说明和书写的简洁, 下面先引入几个定义和符号说明.

定义 1　设 $A \in P^{n\times n}$($P^{n\times n}$ 表示一般数域 P 上全体 $n\times n$ 矩阵), 若存在正整数 k, 使得 $A^{k-1} \neq 0, A^k = 0$, 则称 A 是幂零指数为 k 的幂零矩阵记为 k-幂零矩阵. 记 $P^{n\times n}_{(3,0)}$ 为一切 $P^{n\times n}$ 中的 3-幂零矩阵集合. 记 $P^{n\times n}_{(3,\ rank)} = \{A \in P^{n\times n}_{(3,0)}\ \ A$ 的秩为 $rank\}$

定义 2　形式为 $J(\lambda, t) = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{bmatrix}_{t\times t}$ 的矩阵称为若当块, 其中 $\lambda \in P$, 由若干个块组成的准对角矩阵称为若当形矩阵. 记 $J^{n\times n}_{(3,0)}$ 为一切满足下列条件的若当形矩阵 J 的集合:

¹　$J \in P^{n\times n}_{(3,0)}$;

④ $J = \mathrm{diag}(J(0, n_1), \cdots, J(0, n_m))$ 其中 $J(0, n_j) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n_j\times n_j}$, $1 \leq j \leq m$;

㈣ $3 = n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_m \geq 1,\ \sum_{j=1}^{m} n_j = n.$

*　收稿日期: 2006- 03- 16

显然 $J^{n\times n}_{(3,0)}$ 是有限集合, 记其个数为 $l_n = |J^{n\times n}_{(3,0)}|$.

再记 $J^{n\times n}_{(3,rank)} = \{J \in J^{n\times n}_{(3,0)} \mid J$ 的秩为 $rank\}$, 记其个数为 $l_{(n,rank)} = |J^{n\times n}_{(3,rank)}|$.

定义 3　整数分拆 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$, 其中 $n, n_i \in Z^+$, $1 \le i \le m$, 且 $n \ge n_1 \ge n_2 \ge \cdots \ge n_m \ge 1$, 则 $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ 称为 n 的以首项为 n_1 的有序分拆, 或称其为 n 的一个首 n_1- 有序分拆. (这里 Z^+ 表示所有的正整数集)

在定义 2 中, 利用 $J^{n\times n}_{(3,0)}$ 的定义, 可知 $J^{n\times n}_{(3,0)}$ 中的每一个若当形矩阵总能得到条件 ㈣, 即: $n = \sum_{j=1}^{m} n_j$, $3 = n_1 \ge n_2 \ge \cdots \ge n_m \ge 1$, 不妨称之为 $J^{n\times n}_{(3,0)}$ 中的每一个若当形矩阵总能确定 n 的一个首 3- 有序分拆, 显然 n 的所有首 3- 有序分拆的个数就是 l_n.

以下如果不做特别说明, 一切符号从上.

1　预备知识

引理 1　(若当定理) 设 $A \in P^{n\times n}$, 则必存在可逆阵 $T \in P^{n\times n}$, 使得:

$$T^{-1}AT = J = diag(J(\lambda_1, n_1), \cdots, J(\lambda_m, n_m))$$

其中 $J(\lambda_j, n_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_j \end{bmatrix}_{n_j\times n_j}$, $1 \le j \le m$, 且 $n_1 \ge n_2 \ge \cdots \ge n_m$, $\sum_{j=1}^{m} n_j = n$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 为 $A \in P^{n\times n}$ 的特征值(可能有相同), 在本文中称这样的 J 为 A 的 Jordan 规范型.

引理 2　$A \in P^{n\times n}$, A 为幂零矩阵的充要条件是 A 的特征值全为 0.

引理 3　设 $J(0, m) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}_{m\times m}$, 则 $J^m(0, m) = 0$, 且 $J(0, m)^l \ne 0$, $(1 \le l < m)$.

引理 4　数域 P 上的 k- 幂零矩阵 A 的 Jordan 规范型具有形式 $diag(J_1, \cdots, J_m)$, 其中 $J_j = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n_j\times n_j}$, $1 \le j \le m$, $n_1 \ge n_2 \ge \cdots \ge n_m$, $\sum_{j=1}^{m} n_j = n$; 且 $n_1 = k$.

证明　由引理 1, 2, 即知命题前半部分是成立的. 由于存在可逆阵 $T \in P^{n\times n}$, 满足: $T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}$, 从而 $A^k = TJ^kT^{-1} = T\begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_m^k \end{pmatrix}T^{-1} = 0$, 知: $\begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_m^k \end{pmatrix} = 0$

由引理 3 即知至少存在一个若当块 J_j, 满足 $n_j = k$, $1 \le j \le m$.

推论 1 $A \in P^{n\times n}_{(3,0)}$，则 A 的 Jordan 规范型为 $diag(J_1,\cdots,J_m)$，其中 $J_j = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n_j\times n_j}$，$1\le j\le m$，$3 = n_1 \ge n_2 \ge \cdots \ge n_m$，$\sum_{j=1}^{m} n_j = n$.

从而可知 $P^{n\times n}_{(3,0)}$ 中一切元素的Jordan 规范型构成的集合恰好就是 $J^{n\times n}_{(3,0)}$；而 $P^{n\times n}_{(3,rank)}$ 中一切元素的Jordan 规范型构成的集合恰好就是 $J^{n\times n}_{(3,rank)}$. 由此由引理1即知 $J^{n\times n}_{(3,0)}$ 其实可以认为是所有 n 阶 3-幂零矩阵的一个相似等价类的集合.

这里可知定义 3 中的一个重要结论即:

引理 5 $n(>2)$ 的所有首 3-有序分拆的个数恰好就是 l_n.

引理 6 当 $a\in Z^+$，则 $\sum_{i=1}^{2a}\left[-\frac{i}{2}\right] = -(a^2+a)$，$\sum_{i=1}^{2a}\left[+\frac{1-i}{2}\right] = -a^2$；

当 $a\in Z^+\cup\{0\}$，则 $\sum_{i=1}^{2a+1}\left[-\frac{i}{2}\right] = -(a^2+2a+1)$，$\sum_{i=1}^{2a+1}\left[+\frac{1-i}{2}\right] = -(a^2+a)$

(其中, 符号“$[i]$”表示不大于 i 的最大正整数).

证明 简单检验即可.

引理 6 $\left[z_1+\frac{z_2}{2}\right] = z_1+\left[\frac{z_2}{2}\right]$，$z_1,z_2\in Z+\{0\}$.

证明 若 $z_2 = 2k$，$k\in Z^+\cup\{0\}$，则命题显然成立；若 $z_2 = 2k+1$，$k\in Z^+\cup\{0\}$，则:

$$\left[z_1+\frac{z_2}{2}\right] = \left[z_1+\frac{2k+1}{2}\right] = z_1+k = z_1+\left[\frac{2k+1}{2}\right] = z_1+\left[\frac{z_2}{2}\right]. \qquad \square$$

2 主要结果

定理 1 $A\in P^{n\times n}_3$，$n = r(\mathrm{mod}\ 3)$，则 A 的秩 rank 的取值范围为:

$$2\le rank\le 2\times\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{r}{2}\right].$$

证明 由推论 1即知只要考虑 $J^{n\times n}_{(3,0)}$ 中的矩阵秩即可.

记 $J_k = \{J\in J^{n\times n}_{(3,0)}\ J$ 含有 k 块 $J(0,3)\}$，显然 k 的取值范围为: $1\le k\le\left[\frac{n}{3}\right]$，记 J_k 中一个秩最大的若当形矩阵为 M_k，则 M_k 确定 n 的一个首 3-有序分拆:

$$n = \underbrace{3+\cdots+3}_{k}+\underbrace{2+\cdots+2}_{k_2}+\underbrace{1+\cdots+1}_{k_3}.$$

由于 M_k 是 J_k 中秩最大的矩阵, 故 k_3 必为 0 或 1.

下面证明: 若 $1\le k<\left[\frac{n}{3}\right]$，则 $\mathrm{rank}(M_k)\le\mathrm{rank}(M_{k+1})$.

首先, M_{k+1} 也确定 n 的一个首 3-有序分拆:

$$n = \underbrace{3+\cdots+3}_{k+1}+\underbrace{2+\cdots+2}_{k_4}+\underbrace{1+\cdots+1}_{k_5},\ k_5 \text{ 也必为 } 0 \text{ 或 } 1.$$

若 k_3 为 0, 则 $k_5 = 1$，$k_4 = k_2-2$，从而:

$$\mathrm{rank}(M_k) = 2\times k+1\times k_2,\ \mathrm{rank}(M_{k+1}) = 2\times(k+1)+1\times(k_2-2).$$

由此知 $\mathrm{rank}(M_k) = \mathrm{rank}(M_{k+1})$.

若 k_3 为 1, 则 $k_5 = 0$, $k_4 = k_2 - 1$, 从而:

$$\mathrm{rank}(M_k) = 2 \times k + 1 \times k_2,\quad \mathrm{rank}(M_{k+1}) = 2 \times (k + 1) + 1 \times (k_2 - 1)$$

由此知 $\mathrm{rank}(M_k) < \mathrm{rank}(M_{k+1})$.

综上即知: 若 $1 \le k < \left[\frac{n}{3}\right]$, 则 $\mathrm{rank}(M_k) \le \mathrm{rank}(M_{k+1})$.

由此可见 $J_{(3,0)}^{n\times n}$ 中秩最大的矩阵必在 $J_{\left[\frac{n}{3}\right]}$ 中, 而在 $J_{\left[\frac{n}{3}\right]}$ 中至多只有两个矩阵, 易知 $J_{\left[\frac{n}{3}\right]}$ 中有一个矩阵的秩取值为 $2\times\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{r}{2}\right]$, 并且就是 rank 的最大取值, 显然 rank 的最小取值为 2. □

定理 2　n 阶 3-幂零矩阵相似等价类个数的计数公式, 由 $l_n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{3}\right]}\left(\left[\frac{n-3k}{2}\right] + 1\right)$ 即: $\forall n \in Z^+ - \{1, 2\}$, $n = 6a + r$, $0 \le r \le 5$, $l_n = 3a^2 + ra + \left[\left|\frac{r-1}{2}\right|\right]$ 给出.

证明　在 J_k 中任一矩阵确定 n 的一个首 3-有序分拆的一般式为:

$$n = \underbrace{3 + \cdots + 3}_{k} + \underbrace{2 + \cdots + 2}_{k_2} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k_3}$$

由 $n = \underbrace{3 + \cdots + 3}_{k} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-3k}$ 的拆法, 可知:

$$J_k \text{ 含有}\left[\frac{n-3k}{2}\right] + 1 \text{ 个元素.}$$

而 $J_{(3,0)}^{n\times n} = \bigcup_{k=1}^{\left[\frac{n}{3}\right]} J_k$, 从而有: $l_n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{3}\right]} |J_k| = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{3}\right]}\left(\left[\frac{n-3k}{2}\right] + 1\right)$

令 $n = 6a + r$, $a, r \in Z^+ \cup \{0\}$, 利用引理 4、引理 5 易得下列结果.

当 $r = 0$ 时, $a \ge 1$:

$$l_n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{6a}{3}\right]}\left(\left[\frac{6a-3k}{2}\right] + 1\right) = \sum_{k=1}^{2a}(3a+1) - \sum_{k=1}^{2a}k + \sum_{k=1}^{2a}\left[-\frac{k}{2}\right]$$
$$= 4a^2 + a - (a^2 + a) = 3a^2$$

当 $r = 1$ 时, $a \ge 1$:

$$l_n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{6a+1}{3}\right]}\left(\left[\frac{6a+1-3k}{2}\right] + 1\right) = \sum_{k=1}^{2a}(3a+1) - \sum_{k=1}^{2a}k + \sum_{k=1}^{2a}\left[+\frac{1-k}{2}\right]$$
$$= 4a^2 + a - a^2 = 3a^2 + a$$

当 $r = 2$ 时, $a \ge 1$:

$$l_n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{6a+2}{3}\right]}\left(\left[\frac{6a+2-3k}{2}\right] + 1\right) = \sum_{k=1}^{2a}(3a+2) - \sum_{k=1}^{2a}k + \sum_{k=1}^{2a}\left[-\frac{k}{2}\right]$$
$$= 4a^2 + 3a - (a^2 + a) = 3a^2 + 2a$$

当 $r = 3$ 时, $a \ge 0$:

$$l_n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{6a+3}{3}\right]}\left(\left[\frac{6a+3-3k}{2}\right] + 1\right) = \sum_{k=1}^{2a+1}(3a+2) - \sum_{k=1}^{2a+1}k + \sum_{k=1}^{2a+1}\left[+\frac{1-k}{2}\right]$$

$$= 4a^2 + 4a + 1 - (a^2 + a) = 3a^2 + 3a + 1.$$

当 $r = 4$ 时, $a \geq 0$:

$$l_n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{6a+4}{3}\right]} \left(\left[\frac{6a+4-3k}{2}\right] + 1\right) = \sum_{k=1}^{2a+1} (3a+3) - \sum_{k=1}^{2a+1} k + \sum_{k=1}^{2a+1} \left[-\frac{k}{2}\right]$$

$$= 4a^2 + 6a + 2 - (a^2 + 2a + 1) = 3a^2 + 4a + 1.$$

当 $r = 5$ 时, $a \geq 0$:

$$l_n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{6a+5}{3}\right]} \left(\left[\frac{6a+5-3k}{2}\right] + 1\right) = \sum_{k=1}^{2a+1} (3a+3) - \sum_{k=1}^{2a+1} k + \sum_{k=1}^{2a+1} \left[+\frac{1-k}{2}\right]$$

$$= 4a^2 + 6a + 2 - (a^2 + a) = 3a^2 + 5a + 2.$$

综上即有: $\forall n \in Z^+ - \{1, 2\}$, $n = 6a + r$, $0 \leq r \leq 5$, $l_n = 3a^2 + ra + \left[\left|\frac{r-1}{2}\right|\right]$.

从而证明了 l_n 公式的正确性, 再由推论 1 的结论即知命题是成立的. □

定理 3 rank 的取值按定理 1 的结论, 则秩为 r 的所有 n 阶 3-幂零矩阵的相似等价类的个数计算公式由下给出.

当 $\text{rank} \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$ 时, $l_{(n,\text{rank})} = \left[\frac{\text{rank}}{2}\right]$.

当 $\left[\frac{n+1}{2}\right] < \text{rank}$ 时, 记 $d = \text{rank} - \left[\frac{n+1}{2}\right]$, 则

$$l_{(n,\text{rank})} = \left[\frac{\text{rank}}{2}\right] - 2d + \varphi(n). \quad \left(\text{其中 } \varphi(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ 为奇数时} \\ 1 & n \text{ 为偶数时} \end{cases}\right).$$

证明 由推论 1 的结果, 即知只需证明 $l_{(n,\text{rank})}$ 计数公式的正确性.

为书写简便, 简记 rank 为 r. 下面证明 $J_{(3,r)}^{n\times n}$ 的计数公式.

$J_{(3,r)}^{n\times n}$ 中任一矩阵 J 确定 n 的一个首 3-有序分拆的一般式为:

$$n = \underbrace{3 + \cdots + 3}_{k} + \underbrace{2 + \cdots + 2}_{r-2k} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{x}$$

把上面首 3-有序分拆各项都减去 1, 即可确定 r 的首 2-有序分拆:

$$r = \underbrace{2 + \cdots + 2}_{k} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{r-2k}.$$

由此不难看出, $J_{(3,r)}^{n\times n}$ 中任一矩阵也可确定 r 的首 2-有序分拆, 但其分解还满足一定的条件, 即:

$$r = \underbrace{2 + \cdots + 2}_{k} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{r-2k},$$

同时有: $\exists\, x \in Z^+ \cup \{0\}$, 使得 $3k + 2(r - 2k) + x = 2r - k + x = n$.

记 "$\exists\, x \in Z^+ \cup \{0\}$, 使得 $2r - k + x = n$" 为条件 1. 由此易知在条件 1 下的所有 r 的首 2-有序分拆个数就是 $J_{(3,r)}^{n\times n}$ 的个数. 因此只需证明 $l_{(n,\text{rank})}$ 为 r 在条件 1 下的首 2-有序分拆个数的计数公式, 首先不难得出下列两个性质:

1 在条件 1 下的 r 的首 2-有序分拆中, k 的最大可取值为 $\left[\frac{r}{2}\right]$;

④ 在条件 1 下若有 $r = \underbrace{2 + \cdots + 2}_{k} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{r-2k}$, $k < \left[\frac{r}{2}\right]$ 成立, 则在条件 1 下:

$$r = \underbrace{2 + \cdots + 2}_{k+1} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{r-2(k+1)},\ k < \left[\frac{r}{2}\right] \text{也是成立的.}$$

因此关键是找出在条件 1 下, 满足 r 的首 2-有序分拆的最小 k 值. 而现在则利用性质 ^{1} 、④ 证明 $l_{(n,\,\mathrm{rank})}$ 的计数公式就是 r 在条件 1 下的首 2-有序分拆个数的计数公式.

当 $r \le \left[\frac{n+1}{2}\right]$ 时:

若 $n = 2p + 1$, $p \ge 1$, 则 $r \le p + 1$, 条件 1 变为: $\exists\, x \in Z^+ \cup \{0\}$, 有 $2r - k + x = 2p + 1$, k 能取最小值 1.

若 $n = 2p$, $p \ge 2$, 则 $r \le p$, 条件 1 变为: $\exists\, x \in Z^+ \cup \{0\}$, 有 $2r - k + x = 2p$, k 能取最小值 1.

由性质 ^{1} 、④ 可得, 此时 r 在条件 1 下的首 2-有序分拆个数的计数公式为:

$$\left[\frac{r}{2}\right] - 1 + 1 = \left[\frac{r}{2}\right].$$

当 $r > \left[\frac{n+1}{2}\right]$ 时:

若 $n = 2p + 1$, $p \ge 1$, 且 $r > p + 1$, 则记 $d = r - (p + 1)$, 即 $r = d + p + 1$, 代入条件 1, 可得:

$$2(d + p + 1) - k + x = 2p + 1,\ \text{即}\ 2d - k + x + 1 = 0.$$

满足方程 $2d - k + x + 1 = 0$ 的 k 的最小值为: $2d + 1$. 此时 r 在条件 1 下的首 2-有序分拆个数的计数公式为

$$\left[\frac{r}{2}\right] - (2d + 1) + 1 = \left[\frac{r}{2}\right] - 2d = \left[\frac{r}{2}\right] - 2d + \varphi(n)$$

若 $n = 2p$, $p \ge 2$, 且 $r > p$, 则记 $d = r - p$, 即 $r = d + p$, 代入条件 1, 可得:

$$2(d + p) - k + x = 2p,\ \text{即}\ 2d - k + x = 0.$$

满足方程 $2d - k + x = 0$ 的 k 的最小值为: $2d$. 此时, r 在条件 1 的首 2-有序分拆个数的计数公式为

$$\left[\frac{r}{2}\right] - 2d + 1 = \left[\frac{r}{2}\right] - 2d + \varphi(n)$$

综上, 由性质 ^{1} 、④ 可得, 此时 r 在条件 1 下的首 2-有序分拆个数的计数公式为:

$$\left[\frac{r}{2}\right] - 2d + \varphi(n) \qquad \square$$

致谢　本文得到了莆田学院杨忠鹏教授悉心的指导, 得到了导师刘胜强博士的热情帮助和鼓励, 得到了数学科学学院白正简博士许多非常有益的建议, 在此谨向三位老师表示最真挚的谢意.

参　考　文　献

[1]　李殿龙, 隋思涟. 2-幂零矩阵的 Jordan 标准型. 青岛建筑工程学报, 2001, 22(3): 83–85.

[2]　高等代数. 北京大学数学系. 高等教育出版社, 2001.

[3] 樊恽(等主编). 代数学辞典. 华东师范大学出版社(94年版).

[4] 孙守明. 矩阵的合同类与矩阵的相似类. 聊城大学学报(自然科学版), 2004, 6, 17(2): 30-31.

The Enumeration of Equivalence Class of 3-nilpotent Matrices

Lin Rongzhen *Jiang Fei*

(School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005)

Abstract In this paper, we mainly discuss the enumeration problem of the equivalence class of 3-nilpotent matrix defined in normal number fields. We get conclusions including the range of rank of $n\times n$ 3-nilpotent matrix, calculation formulas of the equivalence class number of 3-nilpotent matrix, and calculation formulas of the equivalence class number of 3-nilpotent matrix with constant rank is presented.

Keywords k-nilpotent matrix; 3-nilpotent matrix; Jordan's normal form; Rank; Partion number of integer